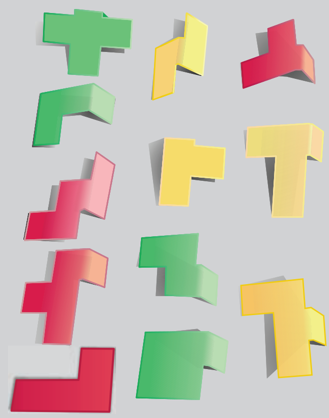
АПРЕЛЬ

ISSN 0130-2221
2017 · № 4

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИДЕЯ В КУБЕ



В этой головоломке требуется полностью покрыть поверхность куба 3×3×3 при помощи данного набора элементов – шести фигурок тетрамино и шести фигурок пентамино. Фигурки эти, правда, не совсем обычные: у всех, кроме одной, есть перегиб.

Головоломка пластиковая, и для удобства сборки на внутренней стороне каждого из элементов имеется небольшой выступ, а в каждой клеточке куба сделано отверстие для такого выступа. Можно сделать головоломку и своими руками, вырезав элементы из алюминиевых уголков, распечатав на 3D-принтере или, что совсем просто, взяв какой-нибудь кубик и вырезав фигурки подходящего размера из плотной бумаги или картона.

Для данного набора элементов задача имеет четыре решения, «половина» одного из них показана на фото. Но несложно придумать и свой вариант этой головоломки с другим набором из 12 элементов в форме гнутых тетрамино и пентамино.

Рекомендуем также прочитать статью С.Тавридова «Пентамино на плоскости и в пространстве» («Квант» №12 за 1981 г.), где рассказывается о похожих головоломках, в которых нужно обклеивать другие многогранники полным набором пентамино, причем фигурки разрешается гнуть в нескольких местах.

В.Журавлев

КВАНТ АПРЕЛЬ 2017 №4

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

2 Решетки и правильные многоугольники. *А.Егоров*

10 Тени сверкающего снега. *В.Птушенко*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

16 Задачи М2458–М2461, Ф2465–Ф2468

17 Решения задач М2446–М2449, Ф2453–Ф2456

21 О вписанной окружности прямоугольного треугольника. *А.Заславский*

24 Задача с кружка, или Ещераз о задаче М2447. *М.Панов*

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

27 Задачи

28 Какие бывают опоры. *С.Дворянинов*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

29 Молекулярно-кинетическая теория и характеристики вещества (окончание). *С.Варламов*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

32 Физика+флора

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

36 Расстояния на сфере. *С.Кузнецов*

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

38 Задачи 24–27

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

39 Футбольные и волейбольные турниры. *А.Заславский*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

42 Наполеон-водолаз и Фейнман-экспериментатор. *А.Панов*

ОЛИМПИАДЫ

44 XXXVIII Турнир городов

46 XXV Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

52 Олимпиада «Ломоносов-2017»

59 Ответы, указания, решения

Памяти А.А.Егорова (3)

Вниманию наших читателей (26)

НА ОБЛОЖКЕ

I *Иллюстрация к «Калейдоскопу «Кванта»*

II *Коллекция головоломок*

III *Шахматная страничка*

IV *Прогулки с физикой*

Решетки и правильные многоугольники

А.ЕГОРОВ

В этой статье разбираются три тесно связанных между собой вопроса.

1) Можно ли расположить правильный n-угольник на листе линованной бумаги – в прямую или косую клетку – так, чтобы его вершины попали в точки пересечения линий?

2) При каких углах α, соизмеримых с полным, т.е. содержащих целое или рациональное число градусов, значения синуса, косинуса или тангенса угла α рациональны?

3) В какие положения может попасть центр правильного n-угольника, который разрешается перекатывать по плоскости (этот вопрос составлял содержание задачи М252 из «Задачника «Кванта»)?

§1. Точечные решетки на плоскости

Рассмотрим на плоскости сетку, образованную двумя семействами параллельных прямых, разрезающих плоскость на одинаковые параллелограммы (рис.1).

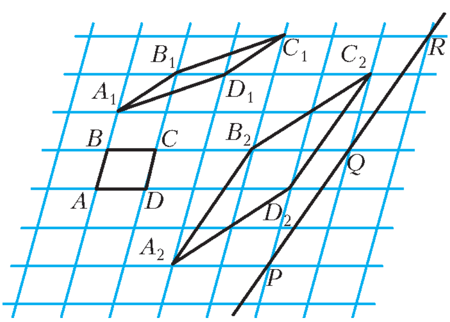


Рис. 1

Множество всех вершин этих параллелограммов назовем *точечной решеткой*, сами вершины – узлами решетки, а любой из параллелограммов разбиения – *основным параллелограммом* разбиения, или параллелограммом, *порождающим решетку*.

Заметим, что одна и та же решетка может получиться из разных сеток прямых: на рисунке 2 изображена так называемая *целочисленная* решетка, т.е. множество точек, имеющих в декартовой системе координат целочисленные координаты. Целочисленную решетку вместе с сеткой синих прямых, параллельных осям координат, можно представлять себе как бесконечный лист клетчатой бумаги, тогда основным параллелограммом будет квадрат со стороной 1. Ту же самую целочисленную решетку можно получить, проводя красные прямые, тогда основным параллелограммом служит параллелограмм $ABCD$. Таким образом, понятие основного параллелограмма решетки связано не только с самой решеткой, но и с сеткой прямых, эту решетку порождающих.

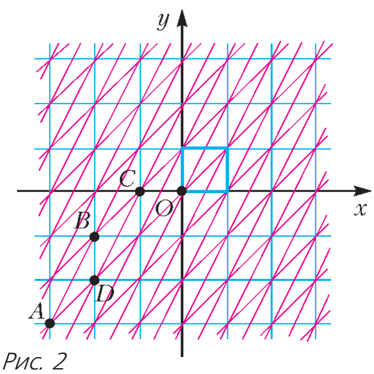


Рис. 2

Из простейших свойств решеток пока отметим следующие.

1°. Всякий параллельный перенос, переводящий некоторый узел решетки в другой узел, переводит решетку в себя.

Статья была опубликована в «Кванте» №12 за 1974 год.

2° (лемма о четвертой вершине параллелограмма). Если три вершины параллелограмма являются узлами некоторой решетки, то и четвертая вершина тоже узел этой решетки.

3° . Если через произвольные два узла Q и R решетки провести прямую, то эта прямая пройдет через бесконечное количество узлов (см. рис.1). При этом все расстояния между соседними узлами, лежащими на прямой, будут равны.

4° . Если параллелограмм с вершинами в узлах некоторой решетки не содержит других узлов на сторонах и внутри себя, то он эту решетку порождает.

Упражнения

1. Докажите свойства 1° – 4° .

2. Пусть a и b – любые действительные числа. Докажите, что множество всех точек с координатами $(ka,\ lb)$, где k и l – целые числа, является решеткой.

Важное свойство решеток отражает следующая задача:

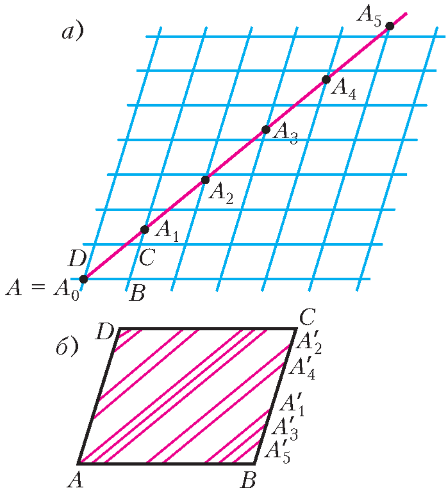


Рис. 3

В некотором узле A решетки находится охотник, а в остальных узлах сидят одинаковые и одинаково расположенные зайцы (рис.3). Охотник наугад стреляет (траектория пули – луч, выходящий из точки A). Вернется ли он домой с добычей? (Зайцы считаются «толстыми».)

23 апреля 2017 года ушел из жизни Андрей Александрович Егоров, замечательный математик, педагог и человек. Большую часть своей творческой жизни он проработал в журнале «Квант» и в Колмогоровском интернате (ныне СУНЦ), щедро делясь с читателями и учениками глубоким пониманием и ярким видением любимой науки.

Более сорока лет Андрей Александрович писал статьи для нашего журнала, четверть века состоял в его редакционной коллегии, без малого двадцать лет руководил отделом математики. Его статьи и книги помогли становлению и развитию многих будущих математиков, школьные учителя и вузовские педагоги еще много лет будут с благодарностью вспоминать Андрея Александровича и активно использовать его творческое наследие.

Мы же, работавшие рядом с Андреем Александровичем, будем всегда помнить глубокого профессионала, яркого, остроумного, широко эрудированного человека, который помнил (с точностью до даты) множество историй и всегда был готов их рассказать. Он был настоящим другом, готовым всегда прийти на помощь. Нам будет очень его не хватать.

Андрей Александрович Егоров (11.10.1939–23.04.2017)

Редакция и редакционная коллегия журнала «Квант»

Понятно, что если траектория пули проходит через узел, отличный от точки A, то заяц, сидящий в этом узле, будет убит. Поэтому интересен только тот случай, когда узел A – единственный на траектории пули; оказывается, что и в этом случае какой-нибудь заяц будет убит. Доказательство содержится в следующей лемме.

5° *(лемма об охотнике и зайцах).* Пусть луч l проходит через узел A некоторой решетки. Тогда найдется такой узел, расстояние от которого до луча l будет меньше любого наперед заданного числа ε.

Доказательство. Обозначим точки пересечения луча l с наклонными прямыми сетки через $A_0 = A, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ (см. рис. 3,*а*). Совместим все параллелограммы, на правых сторонах которых лежат эти точки, с параллелограммом $ABCD$, тогда каждая точка A_n перейдет в некоторую точку A_n' на стороне BC (см. рис. 3,*б*). Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие точки A_m' и A_{m+k}', что расстояние между ними будет меньше ε.

Докажите теперь, что расстояние от точки A_k до одного из узлов решетки меньше ε (в частности, если A_m' совпадает с A_{m+k}', то A_k будет узлом решетки).

Следствие. Для любого иррационального числа $\alpha > 0$ и любого положительного ε найдутся такие натуральные m и n, что $|m\alpha - n| < \varepsilon$.

Доказательство. Выберем на плоскости декартову систему координат и проведем прямую $y = \alpha x$. В силу иррациональности α, единственной точкой с целочисленными координатами на этой прямой будет начало координат. Прямая $y = \alpha x$ пересекает каждую вертикальную прямую $x = m$ в точке $(m, m\alpha)$. По лемме 5° найдется такой узел (m, n) целочисленной решетки, что расстояние (по вертикали) от него до точки $(m, m\alpha)$ будет меньше ε, что и требовалось доказать.

Легко видеть, что среди всевозможных попарных расстояний между узлами любой решетки есть наименьшее (докажите!).

Это свойство вместе со свойством 2° решетки можно принять за определение решеток.

Теорема. *Пусть множество M на плоскости обладает следующими свойствами:*

а) расстояние между любыми двумя его точками не меньше некоторого положительного числа d;

б) если три точки A, B, C множества M являются вершинами некоторого параллелограмма ABCD, то и четвертая вершина D этого параллелограмма принадлежит множеству M.

Тогда M – решетка.

Доказательство. Возьмем произвольную точку B, принадлежащую множеству M. Пусть A – ближайшая к B точка из M (рис.4,*а*; такая точка существует, так как все попарные расстояния между точками множества M больше d).

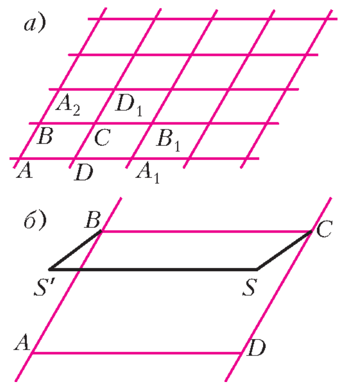


Рис. 4

Через точки A и B проведем прямую. Среди точек множества M, не лежащих на этой прямой, выберем ближайшую к точке B – точку C – и построим параллелограмм $ABCD$. В силу свойства б), точка D также принадлежит множеству M.

Построим решетку, порождаемую параллелограммом $ABCD$. Докажем, что множество M совпадает с построенной решеткой.

Из свойства б) множества M следует, что все узлы этой решетки ему принадлежат.

Упражнение 3. Докажите это.

Поэтому нужно только проверить, что ни на границе, ни внутри параллелограмма $ABCD$ нет точек множества M, отличных от его вершин.

Это почти очевидно: если точка S лежит внутри параллелограмма (рис.4,*б*), то хотя бы один из углов ASB, BSC, CSD и ASD будет тупым или прямым и поэтому расстояние от S до одной из его вершин окажется меньше какой-нибудь его стороны (если S лежит на границе – то же самое); пусть, например, это расстояние SC. Построим параллелограмм $BCSS'$ (S' принадлежит M). Тогда BS' меньше либо BC, либо BA, но это противоречит выбору либо точки C, либо точки A.

Остальные случаи разберите самостоятельно.

Теорема доказана.

Упражнения

4. Пусть α – произвольное иррациональное число. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого действительного числа β найдутся такие целые числа m и n, что $|m\alpha + n - \beta| < \varepsilon$.

5*. Докажите, что десятичная запись числа 2^γ может начинаться с любой наперед заданной комбинации цифр.

§2. Правильные многоугольники

Возьмем лист клетчатой бумаги. Понятно, что квадрат с вершинами в узлах такой решетки можно нарисовать многими способами (рис.5,*а*). А можно ли на клетча-

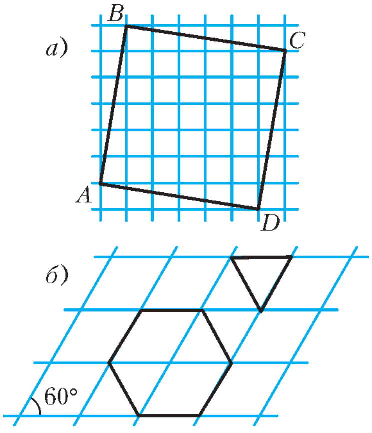


Рис. 5

той бумаге нарисовать правильный треугольник или правильный шестиугольник? Оказывается, нельзя.

Упражнение 6. Докажите это.

В то же время легко построить решетку, на которую правильный треугольник или правильный шестиугольник уже можно «поместить» (рис.5,*б*).

Спрашивается, а как обстоят дела с остальными правильными многоугольниками? Существует ли, например, решетка, на которую можно было бы «поместить» правильный пятиугольник так, чтобы все его вершины оказались узлами этой решетки?

Оказывается, такой решетки нет. Действительно, предположим, что нам удалось построить решетку так, что вершины правильного пятиугольника оказались в ее узлах (рис.6). Проведем диагонали этого пятиугольника. По свойству 2° §1, точки пересечения диагоналей являются узлами решетки: каждая из них служит четвертой вершиной параллелограмма, три другие вершины которого – узлы решетки (точка A_1, например, это вершина параллелограмма A_1CDE). Эти точки образуют правильный пятиугольник со стороной, в $k = \dfrac{A_1B_1}{AB}$ раз отличающейся от стороны исходного пятиугольника. Проведя диагонали нового пятиугольника, получим еще меньший пятиугольник с вершинами в узлах нашей решетки и так далее. В конце концов сторона пятиугольника станет меньше минимального расстояния между узлами решетки, а это находится в противоречии с тем, что вершины получающихся пятиугольников – узлы решетки.

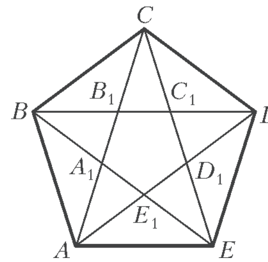


Рис. 6

Упражнение 7. Найдите k.

Итак, правильный пятиугольник не может быть «нарисован» ни на одной решетке.

Докажем, что точно так же обстоит дело и с остальными правильными q-угольниками при $q \geq 7$.

Доказательство основывается на той же идее: предполагается, что правильный q-угольник с вершинами в узлах решетки существует, и строится меньший q-угольник с вершинами в узлах. Затем процесс построения повторяется. В конце концов получается правильный q-угольник со стороной, меньшей минимального расстояния между узлами. Поэтому нам нужно только указать, как по данному правильному q-угольнику с вершинами в узлах решетки построить меньший правильный q-угольник, вершины которого будут также находиться в узлах нашей решетки.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_q$ – узлы некоторой решетки, являющиеся вершинами правильного q-угольника, и пусть M – произвольный узел решетки (рис.7). Отложим от

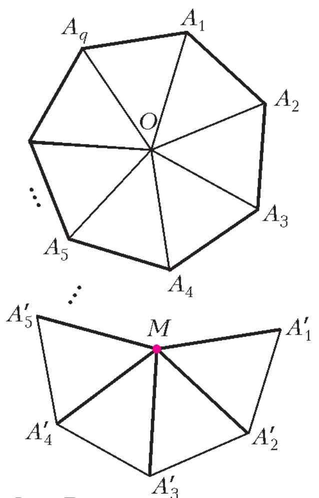


Рис. 7

точки M отрезки MA'_1, MA'_2, MA'_3, … …, MA'_q, равные, параллельные и так же направленные, как стороны A_qA_1, A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{q-1}A_q$ нашего многоугольника. Точки A'_1, A'_2, A'_3, …, A'_q – узлы решетки, так как каждая из них является четвертой вершиной параллелограмма, три другие вершины которого заведомо узлы.

Легко видеть, что многоугольник $A'_1A'_2 \ldots A'_q$ – правильный, причем длина его стороны в $k_q = \dfrac{A_1A_2}{OA_1}$ раз больше длины стороны исходного q-угольника.

Тем самым, вопрос о правильных многоугольниках, «помещающихся» на точечных решетках, полностью решен: *такими многоугольниками являются только квадраты, правильные треугольники и правильные шестиугольники.*

Упражнения

8. Найдите k_q.

9. Существуют ли решетки, кроме целочисленной, на которые можно поместить квадрат?

10. Приведите пример решетки, отличной от изображенной на рисунке 5,*б*, на которую можно поместить правильный треугольник.

11. Существует ли решетка, на которую помещаются и квадрат, и правильный треугольник?

12 (Н.Васильев). На плоскости проведены параллельные прямые на одинаковых расстояниях друг от друга («тетрадь в линейку»). Какие правильные n-угольники можно нарисовать на плоскости так, чтобы все их вершины лежали иа проведенных прямых?

§3. Иррациональность значений тригонометрических функций

Сможете ли вы ответить на такой вопрос: рациональны или иррациональны числа $\sin 1°$, $\cos\dfrac{\pi}{19}$, $\operatorname{tg}\dfrac{7}{55}\pi$? Или на такой: соизмеримы[1] ли числа π и $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$? И вообще: для каких углов $\alpha = \dfrac{p}{q}\pi$ (p и q целые) будут рациональными числа: а) $\cos\alpha$; б) $\sin\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha$?

Ясно, что $\cos\alpha$ рационален при

$$\alpha = \frac{k\pi}{2} \text{ и } \alpha = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1),$$

$$\sin\alpha \text{ – при } \alpha = \frac{k\pi}{2} \text{ и } \alpha = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1),$$

$$\operatorname{tg}\alpha \text{ – при } \alpha = k\pi \text{ и } \alpha = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi,$$

где k – целое. Мы увидим, что при остальных $\alpha = \dfrac{p}{q}\pi$ значения всех трех функций иррациональны.

Для доказательства нам понадобятся следующие факты из тригонометрии.

1. *Для всякого натурального n функция $\cos nx$ является многочленом n-й степени*

[1] Напомним, что два числа α и β называются соизмеримыми, если их отношение рационально, т.е. если $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{p}{q}$, где p и q – целые числа и $q > 0$.

от $\cos x$ *с целыми коэффициентами, т.е.*

$$\cos nx = P_n(\cos x),$$

где $P_n(y)$ *– многочлен с целыми коэффициентами степени n.*

2. *Функция* $\sin nx$ *является произведением функции* $\sin x$ *на некоторый многочлен степени n – 1, относительно* $\cos x$*, с целыми коэффициентами, т.е.*

$$\sin nx = \sin x \cdot Q_{n-1}(\cos x),$$

где $Q_{n-1}(y)$ *– многочлен с целыми коэффициентами степени n – 1.*

Упражнение 13. Докажите эти утверждения.

Отметим простые **следствия** приведенных утверждений:

а) если $\cos x$ рациональное число, то $\cos nx$ – тоже рациональное число, а числа $\sin x$ и $\sin nx$ соизмеримы (при $\sin nx \neq 0$);

б) если p и q взаимно простые числа и $\cos\frac{p}{q}\pi$ рациональное число, то число $\cos\frac{\pi}{q}$ – также рационально.

Докажем следствие б) (следствие а) очевидно).

Заметим, что если p и $q > 1$ взаимно просты, то существует такое натуральное число k, что число kp при делении на q дает в остатке 1, т.е. $kp = lq + 1$.

Упражнение 14. Докажите это.

Поэтому если число $\cos\frac{p}{q}\pi$ рационально, то рационально и число

$$\cos k\left(\frac{p}{q}\pi\right) = \cos\left(\frac{lq+1}{q}\pi\right) = (-1)^l\cos\frac{\pi}{q}.$$

Если же рационально число $\cos\frac{\pi}{q}$, то рационально и $\cos\frac{p}{q}\pi$ при любом целом p (см. утверждение 1).

Итак, *число* $\cos\frac{p}{q}\pi$ *при взаимно простых p и q > 1 рационально тогда и только тогда, когда рационален* $\cos\frac{\pi}{q}$.

Теперь докажем, что $\cos\frac{\pi}{q}$ *иррационален при всех натуральных q > 3.*

Предположим, что $\cos\frac{\pi}{q} = \frac{m_1}{n_1}$ – рациональное число (m_1 и n_1 – натуральные). Введем на плоскости декартову систему координат и проведем лучи, образующие с положительным направлением оси x углы

$$0,\ \frac{\pi}{q},\ \frac{2\pi}{q},\ \ldots,\ \frac{2q-1}{q}\pi.$$

Пусть $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{2q-1}$ – точки пересечения этих лучей с единичной окружностью (рис.8). Многоугольник $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{2q-1}$

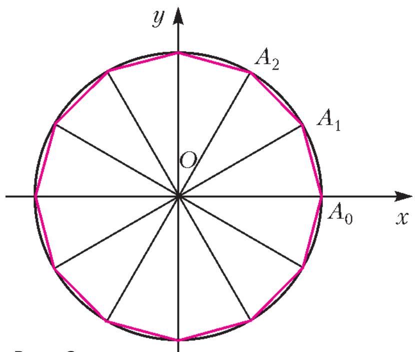


Рис. 8

правильный; точка A_k имеет координаты $\left(\cos\frac{k}{q}\pi, \sin\frac{k}{q}\pi\right)$. Так как $\cos\frac{\pi}{q}$ рационален, то абсцисса точки A_k – число рациональное:

$$\cos\frac{k}{q}\pi = p_k\left(\cos\frac{\pi}{q}\right) = \frac{m_k}{n_k};$$

ордината же ее равна произведению рационального числа $Q_k\left(\cos\frac{\pi}{q}\right) = \frac{r_k}{s_k}$ на число $\sin\frac{\pi}{q}$ (см. упражнения 13 и 14; $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, 2q-1$; координаты точки $A_0 = (1, 0)$). Таким образом,

$$A_k = \left(\frac{m_k}{n_k}, \frac{r_k}{s_k}\cdot\sin\frac{\pi}{q}\right).$$

Приведем все дроби $\frac{m_k}{n_k}$, $\frac{r_k}{s_k}$ к общему знаменателю; обозначим его через D. Тогда

$$A_k = \left(\frac{M_k}{D}, \frac{N_k}{D}\cdot\sin\frac{\pi}{q}\right),$$

где M_k и N_k – целые, $k = 1, 2, \ldots, 2q-1$. Рассмотрим теперь все точки с координатами

$$\left(\frac{i}{D}, \frac{j}{D} \cdot \sin\frac{\pi}{q}\right)$$

(i и j – целые) – эти точки образуют решетку (см. упражнение 2), причем вершины нашего правильного $2q$-угольника $A_0A_1 \ldots A_{2q-1}$ являются ее узлами. Но этого не может быть (см. §2), так как $2q \geq 8$. Поэтому наше предположение о том, что при $q > 3$ число $\cos\frac{\pi}{q}$ рационально, было неверным, и, следовательно, все числа $\cos\frac{p}{q}\pi$ ($q > 3$, p и q взаимно просты) иррациональны!

Упражнение 15. Пусть $q \geq 3$, p и q взаимно просты. Докажите, что:

а) числа $\sin\frac{p}{q}\pi$ для $q \neq 6$ иррациональны;

б) то же для чисел $\operatorname{tg}\frac{p}{q}\pi$, если $q \neq 4$.

Полученные результаты можно сформулировать еще и так: числа $\arcsin\frac{p}{q}$, $\arccos\frac{p}{q}$ при $\frac{p}{q} \neq 0$, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1, а также числа $\operatorname{arctg}\frac{p}{q}$ при $\frac{p}{q} \neq 0$, ± 1 (и взаимно простых p и q) несоизмеримы с числом π.

§4. Решение задачи М252

Расмотрим задачу М252:

а) На плоскости лежит правильный восьмиугольник со стороной a. Его разрешается «перекатывать» по плоскости, переворачивая (симметрично отражая) относительно любой стороны. Докажите, что для любой точки A плоскости и любого $\varepsilon > 0$ можно «перекатить» восьмиугольник в такое положение, что центр его будет находиться от точки A на расстоянии меньше ε.

б) Решите аналогичную задачу для правильного пятиугольника.

в) Для каких правильных q-угольников верно аналогичное утверждение?

Мы приведем два решения этой задачи. Первое решение опирается на иррациональность чисел $\cos\frac{2\pi}{q}$ при $q > 4$, $q \neq 6$. Второе основывается на теореме, доказанной в §1.

Прежде всего заметим, что утверждение задачи *не справедливо* для правильных треугольника и шестиугольника, а также и для квадрата: в этих случаях точки, в которые попадает центр соответствующего многоугольника в результате «перекатываний», образуют решетку (докажите это!). Оказывается, что для всех остальных правильных q-угольников утверждение задачи верно – мы докажем, что, каковы бы ни были точка A и $\varepsilon > 0$, центр любого правильного q-угольника при $q \neq 3$, $q \neq 4$, $q \neq 6$ после некоторого количества «перекатываний» попадает в круг радиуса ε с центром в точке A.

Прежде чем приступать к доказательству, выясним некоторые свойства множества M тех точек плоскости, в которые переходит центр правильного q-гольника P после четного числа «перекатываний». Заметим, что q-угольник P', получающийся из P после четного числа «перекатываний», расположен таким образом, что его стороны параллельны сторонам исходного. Поэтому мы можем считать, что P' получен из P параллельным переносом.

Лемма 1. *Если три вершины параллелограмма A, B и C принадлежат M, то и четвертая его вершина D также принадлежит M.*

Доказательство. Пусть точки A, B и C параллелограмма принадлежат M (рис.9) и D – четвертая вершина параллелограмма. Ясно, что мы можем пройти из точки C в точку D, осуществляя те же параллельные переносы, что и при переходе из точки B в точку A.

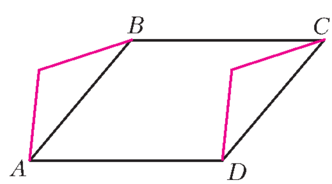


Рис. 9

Лемма 2. *Множество M переходит в себя при повороте на угол $\frac{2\pi}{q}$ вокруг любой из его точек.*

Доказательство. Построим цепочку q-угольников, примыкающих друг к другу по стороне и «соединяющих» наш q-угольник с центром в заданной точке O с q-угольником с центром в любой другой точке A множества M (рис.10).

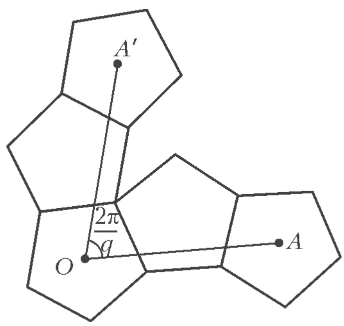


Рис. 10

При повороте на угол $\frac{2\pi}{q}$ вокруг точки O эта цепочка многоугольников переходит в другую цепочку, соединяющую исходный многоугольник с многоугольником, центром которого является точка A', полученная из A поворотом. Следовательно, точка A' также принадлежит множеству M.

Перейдем непосредственно к решению задачи.

Первое решение. Разберем сначала случай правильного восьмиугольника. Будем считать, что апофема многоугольника равна 1. Введем на плоскости систему координат так, как показано на рисунке 11, и посмотрим, что происходит с координатами центров при «перекатывании» через стороны многоугольника P.

При «перекатывании» вдоль оси x ординаты центров не меняются, а абсциссы

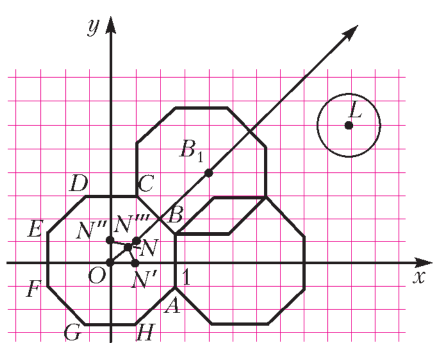


Рис. 11

увеличиваются или уменьшаются на 2. При «перекатывании» вдоль биссектрисы первого координатного угла координаты точек либо увеличиваются, либо уменьшаются на $\sqrt{2}$. Если сделать n шагов вдоль этой биссектрисы вправо и вверх, затем m шагов вдоль оси x влево и m шагов вдоль оси y вниз, то мы попадем в точку N с координатами $\left(n\sqrt{2}-2m, n\sqrt{2}-2m\right)$. Так как $\sqrt{2}$ – число иррациональное, то (см. §1) найдутся такие натуральные m и n, что

$$0 < n\sqrt{2}-2m < \frac{\varepsilon}{4},$$

где ε – любое положительное число.

Отметим, что мы можем также прийти в точку N', получающуюся из N поворотом на угол 45° по часовой стрелке, и в точку N'', получающуюся из N поворотом на угол 45° против часовой стрелки.

Достроим треугольник $ON'N''$ до квадрата $ON'N''N'''$ и рассмотрим решетку, им порождаемую. Так как стороны и диагонали этого квадрата меньше ε, то во всяком круге L радиуса ε окажется хотя бы один узел решетки. Но по лемме 1 все узлы этой решетки можно получить «перекатываниями» из центра восьмиугольника.

Тем самым, про восьмиугольник все доказано. Для остальных многоугольников (конечно, правильных) доказательство проводится по той же схеме.

Второе решение. Это решение несколько короче первого и, пожалуй, нагляднее, но оно использует трудную теорему из §1. Как мы видели, достаточно доказать, что в множестве M найдутся сколь угодно близкие точки.

Предположим, что это не так, т.е. что расстояние между точками множества M больше некоторого положительного числа d. В силу теоремы из §1 и лемм 1 и 2, множество M является решеткой, которая, к тому же, переходит в себя при повороте на угол $\frac{2\pi}{q}$. Из этого немедленно следует, что существует правильный q-угольник с вершинами в ее узлах, а это возможно лишь при $q = 3$, $q = 4$ или $q = 6$.

Решение закончено.

Тени сверкающего снега

В.ПТУШЕНКО

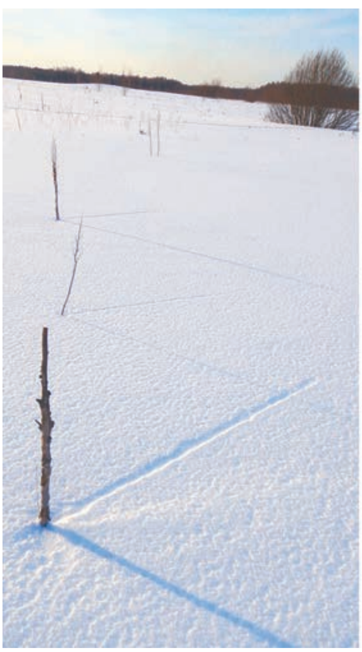
Два месяца назад мне довелось опубликовать фотографии одного необычного природного явления – снежных теней («Наука и жизнь», 2017, №2), которые неожиданно вызвали большой интерес как знакомых, так и незнакомых мне людей. Например, на одном из «научных форумов» в интернете разгорелась бурная дискуссия о природе явления, о чем я узнал от участников форума, разыскавших меня для уточнения деталей – погодных условий, места и времени наблюдения.

Мне показалось, что было бы полезно рассмотреть хотя бы некоторые из гипотез, высказанных интересующимся наукой сообществом. Полезно как для понимания самого явления, оказавшегося столь увлекательным, так и в качестве некоторого примера «затравки» для будущих исследований, которые отважатся провести читатели, не удовлетворенные лишь обменом мнениями и готовые потратить собственное время в поисках научной истины. В качестве источников необходимых для расчетов физических величин будут использованы лишь доступные в интернете издания, чтобы подчеркнуть, насколько не требующим какого-либо подвига является предлагаемый здесь анализ.

Многие вариации предложенных участниками обсуждения механизмов формирования «отпечатка» на снегу (см. приведенные в статье и на четвертой странице обложки фотографии) можно свести к четырем основным гипотезам.

1) Картина на снегу – это запечатленная настоящая тень: неожиданно выглянувшее солнце растопило (нагрело) снег на всей поверхности поля, кроме тех участков, на которые падала тень. После этого началась поземка, и снежинки прилипали к более теплому снегу на поле, но не прилипали к холодному снегу в тени.

2) Вторая гипотеза также рассматривает



неравномерный прогрев поверхности снега солнцем, но предполагает иной механизм визуализации возникающего распределения температур: на солнце снег спекся, образовав ледяную корочку, и в дальнейшем ее выветривание происходило медленнее, чем не спекшихся участков в тени.

3) Третья гипотеза тоже видит причину в неравномерном нагреве поверхности снега, но в момент снегопада: с двух сторон от затененной поверхности, на границе более теплого и более холодного снега, возникают восходящие конвективные потоки воздуха, которые не дают снежинкам опуститься в область тени.

4) Наконец, четвертая гипотеза приписывает образование этой картины отражению солнечного света от веток и стволов (как солнечный зайчик, который, упав на снег, растапливает его) или же тепловому излучению нагретых солнцем стволов и веток.

Первые три гипотезы предполагают механизмы, которые включают один общий элемент: неравномерный нагрев поверхности снега. Вот его, этот нагрев, мы и попытаемся оценить. Для этого нам потребуются следующие данные, которые легко найти в физических справочниках: интенсивность солнечного излучения вблизи поверхности Земли без учета ослабления атмосферой (так называемая солнечная постоянная), степень ослабления излучения в атмосфере, склонение солнца, альбедо снега (доля отраженного им света), а также некоторые характеристики теплообмена для снега, о которых мы скажем ниже.

Оценим энергию E солнечного света, падающую на единицу горизонтальной поверхности земли в единицу времени в безоблачный день в конце февраля на широте Москвы (время и место, когда и где наблюдалось это явление; рис.1):

$$E = E_0 a_{\text{атм}} \sin h,$$

где $E_0 = 1367$ Вт/м^2 – сол-

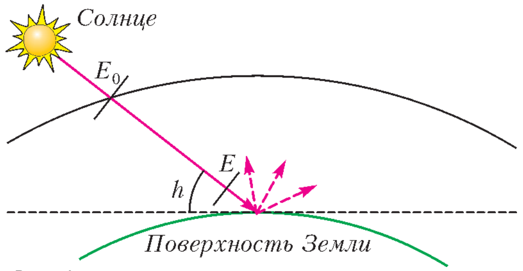


Рис. 1

нечная постоянная, h – угловая высота солнца над горизонтом, $a_{\text{атм}}$ – степень ослабления солнечного света при прохождении в атмосфере, зависящая от h. Наибольшая высота, а следовательно, максимальное значение E наблюдается в полдень, когда

$$h = 90° - \varphi + \delta,$$

где φ – широта места, δ – склонение солнца. Широта Москвы $\varphi = 56°$, склонение солнца в момент наблюдения $\delta \approx -8°$ [1], т.е. $h \approx 26°$, и при этой высоте $\alpha_{\text{атм}} \approx 0{,}5$ [2]. Таким образом, $E \approx \approx 300$ Вт/м^2. Приняв альбедо снега равным 0,9 [3], получим, что 1 м^2 за 1 с поглощает около 30 Вт солнечной энергии. Эта энергия может приводить к нагреву снежного покрова, который отчасти компенсируется ее оттоком от поверхностного слоя снега за счет теплообмена с нижними слоями и с воздухом.

Какую часть энергии способен отвести воздух? Теплопередача на границе сред

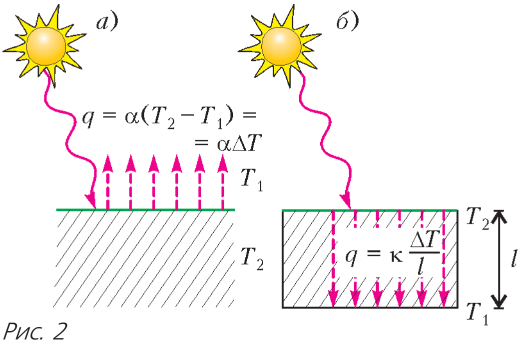


Рис. 2

(в данном случае на границе снег–воздух; рис.2,*а*) в первом приближении пропорциональна разности температур двух сред: $q = \alpha\Delta T$ (закон Ньютона – Рихмана), где q – энергия, передаваемая от одной среды к другой за единицу времени с единицы площади, а α – так называемый коэффициент теплоотдачи. Нам придется пользоваться приблизительными оценками этой величины, в качестве которых для воздуха часто приводят диапазон от 5 до 35 $\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$ при условии так называемой свободной конвекции воздуха – т.е., грубо говоря, без ветра. Какова же способность воздуха по теплоотводу при вынужденной конвекции, каждый сам может оценить, глянув на свой компьютер, в котором воздушное охлаждение при суммарной выделяемой тепловой мощности порядка 0,5 кВт с общей площади (даже при всевозможных радиаторах) порядка всего лишь нескольких сотых долей квадратного метра способно поддерживать разность температур не более нескольких десятков градусов. Легко оценить, что коэффициент теплоотдачи должен достигать в этом случае величин порядка нескольких сотен ватт на квадратный метр и на кельвин. Как мы видим, даже в отсутствие ветра величина α достаточна, чтобы поддерживать разность температур между воздухом и поверхностью нагреваемого солнцем снега в пределах

$$\Delta T = \frac{q}{\alpha} = \frac{30\ \text{Вт}/\text{м}^2}{(5-35)\ \text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})} \approx$$
$$\approx (6-0{,}9)\ \text{К}.$$

А при наличии ветра эта величина окажется еще ниже – как минимум, меньше одного градуса!

Попытаемся теперь оценить, что может дать теплообмен между разными слоями снега. С одной стороны, тепло быстро распространяется на небольшие расстояния, т.е. наиболее эффективным в отводе тепла будет самый близкий к поверхности тонкий слой снега. С другой стороны, тонкий слой и прогреется быстрее. Выберем – пока что наугад – толщину верхнего слоя снега равной $l = 2$ см. Если его нижняя поверхность поддерживается при постоянной температуре, а верхняя нагревается солнцем, то до какой температуры теплоотвод в этом слое позволит прогреться верхней поверхности (рис.2,*б*)? Для простоты будем считать, что изменение температуры с глубиной в этом тонком слое линейное и что закон теплопроводности (закон Фурье) можно применить в доступной школьнику алгебраической форме:

$$q = \kappa\frac{\Delta T}{l},$$

где κ – теплопроводность снега, а ΔT – разность температур между верхней и нижней границами слоя. Примем $\kappa \approx \approx 1\ \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ [4], тогда теплоотвод позволит поддерживать температуру верхней границы в пределах практически половины градуса (точнее, 0,6 К):

$$\Delta T = \frac{ql}{\kappa} \approx \frac{30\ \text{Вт}/\text{м}^2\cdot 0{,}02\ \text{м}}{1\ \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})} = 0{,}6\ \text{К}.$$

Помешать этому теплоотводу может только то, что сам слой постепенно разогреется. В таком случае потребуется отвод тепла от него еще ниже, т.е. на бо́льшие расстояния, что потребует и большего времени, иными словами, будет уже не столь эффективно. Слой толщиной 2 см имеет массу около 10 кг на каждый квадратный метр (мы приняли плотность снега равной $500\ \text{кг}/\text{м}^3$; если же плотность больше, то это только усилит наши выводы), его теплоемкость порядка $10\cdot 2100\ \text{Дж/К} = = 21\ \text{кДж/К}$ [4], и на разогрев его на те же

0,6 градуса солнечным светом потребуется время

$$t = \frac{0{,}6\ \text{К} \cdot 21\ \text{кДж/К}}{30\ \text{Вт}} = 420\ \text{с} = 7\ \text{мин}.$$

Итак, исходя из этой грубой оценки, можно считать, что даже и без помощи воздуха, один лишь теплоотвод поглощенной солнечной энергии способен поддерживать температуру поверхности снега в пределах примерно половины градуса в течение первых нескольких минут.

Теперь мы готовы к тому, чтобы перейти к анализу самого явления. Наша гипотеза (а в этой части и все три первые гипотезы участников форума) формулируется так: солнце нагрело весь снег, кроме тех участков, на которые падала тень. Но ведь солнце движется по небу, а вместе с ним и тень не остается на месте. Значит, нужно предположить, что в пасмурный день на короткое время выглянуло солнце, оплавило снег на полях, снова скрылось и больше не появлялось (иначе возникли бы и другие тени). С метеорологической точки зрения ничего невероятного в этом нет. Оценим только, на какое время должно было появиться солнце сквозь прорехи в облаках.

Обратимся к самой первой фотографии. По мере движения солнца тень должна «заметать» сектор круга (конечно, не в точности круга, поскольку изменяется еще и высота солнца над горизонтом, но эти детали для нас сейчас не важны). В то же время мы видим на фотографии достаточно уверенную параллельную проекцию палки. На какой угол должно было сместиться солнце, чтобы мы не смогли заметить отличие сектора круга от параллельной проекции? В качестве такого критерия «разрешения теней» можно предложить смещение тени на расстояние, равное ее ширине. Иными словами, если бы тень от палки при движении солнца переместилась более чем на ширину самой тени от палки, то мы бы это наверняка заметили (скорее всего, мы заметили бы даже и менее значительное смещение, но выберем более надежный критерий – нам его будет достаточно). Толщина тени составляет около 2 см, ее длина около 1 м. Это соответствует угловому смещению, равному $2\ \text{см}/100\ \text{см} = 0{,}02\ \text{рад} \approx 1{,}15°$. Такое расстояние по небу солнце проходит за время от 4,6 мин (в полдень) до 5,5 мин (вблизи шести часов утра и вечера). Иными словами, у солнца есть пять минут на то, чтобы подтопить снег на полях, после чего оно снова должно скрыться. Однако солнечный свет – это не лазер из фантастического боевика и не излучение от атомного взрыва, которое выжигает все на своем пути. Пяти минут солнцу (по крайней мере, в наших широтах зимой) недостаточно даже на то, чтобы прогреть поверхность снега хотя бы на полградуса.

Конечно, у каждой из перечисленных выше трех гипотез еще остается шанс «выжить», если предположить исключительно высокую чувствительность «своего» механизма даже к минимальной разнице температур и, к тому же, возможность «сработать» достаточно быстро (ведь после исчезновения солнца за облаками все обсуждавшиеся нами механизмы теплообмена будут настолько же быстро охлаждать поверхность, выравнивая все неоднородности температуры). В принципе, исключить этого нельзя...

Для четвертой гипотезы, при наличии некоторого физического опыта, ее неправдоподобность может оказаться очевидной с первого взгляда. Однако цель этой статьи – как раз помочь в приобретении такого опыта. К сожалению, ограниченный объем статьи не позволяет рассмотреть эту гипотезу подробно. Поэтому сделаем только несколько общих указаний для тех, кто пожелает потренироваться и некоторый физический опыт приобрести.

Два главных вопроса, которые надо будет рассмотреть, это направленность теплового (или отраженного) излучения и его общая интенсивность. Интенсивность можно будет оценить с помощью закона Стефана – Больцмана, а направленность – с учетом закона Ламберта (для отраженного излучения также надо будет рассмотреть предельные возможности зеркального и диффузного отражения). Чтобы вы могли себя проверить, сразу скажем ответ: мощность теплового излучения стебля (его освещенной половинки) не будет превышать 5 Вт, что даст около $0,4\ Вт/м^2$ в области кончика тени – т.е. несравненно ниже, чем интенсивность солнечного излучения! Что же касается направленности, то ее будет недостаточно не только для создания узкой тени с четкими концами, но и вообще для сколько-нибудь структурированного изображения.

В завершение выскажу и одну «позитивную» идею – чем, на мой взгляд, все-таки можно было бы объяснить наблюдаемое явление. Мне самому наиболее вероятной кажется такая простая гипотеза: наблюдаемые «тени» – это именно тени от снегопада. В русском языке утвердилось словосочетание «косой дождь» (например, у Маяковского: «По родной стране пройду стороной, как проходит косой дождь»), а вот понятия «косой снег» или «косой снегопад», пожалуй, не встречаются. Тем не менее, мне кажется, это может быть след именно от такого снегопада.

Как можно было бы подтвердить или опровергнуть эту гипотезу? Здесь можно двигаться с двух сторон, «встречными путями». Можно попытаться доказать, что такое движение мелких частиц – снежинок – в воздухе (т.е. прямолинейное, или, по крайней мере, лежащее в одной вертикальной плоскости) невозможно ни при каких условиях. А можно, наоборот, попытаться продемонстрировать такое движение хотя бы одним примером. При этом задача распадется на две части. Первая часть, условно назовем ее «физической», – показать, что при некотором наборе физических условий (скорость ветра, размер частиц, температура и т.п.) такое движение возможно. И не менее важная вторая часть, «метеорологическая», – показать, что такие физические параметры в принципе могут реализоваться в природе во время снегопада.

Разумеется, эти пути – не заменяющие, а дополняющие друг друга, и на каком из них ждет удача, зависит не от нас, а от действительной природы явления. Однако первый из этих двух путей требует выйти далеко за пределы «школьной» физики, в то время как второй путь, как мне кажется, может оказаться не только посильной, но и весьма увлекательной задачей даже для школьника. Поэтому для тех, кому это вдруг покажется интересным, я дам несколько советов, как можно было бы провести такую работу и какие проблемы при этом придется решать.

Прежде всего, надо понимать, что в реальных условиях домашней лаборатории придется работать, скорее всего, не в точности с той физической системой, которая нас интересует, а с некоторой ее моделью, т.е. с чем-то, что было бы наибольшим образом похоже на нее по основным параметрам. Так, едва ли вам удастся раздобыть снежную пушку. Но даже если вы и станете ее счастливым обладателем, то вряд ли сможете в достаточно широких пределах варьировать создаваемую ею скорость ветра и размер частиц. А значит, вам придется работать с какими-то другими частицами, взвешенными в воздухе.

В домашних условиях проще всего экспериментировать с капельками воды – их потоки можно получить с помощью и увлажнителя воздуха, и пульверизатора, и, в крайнем случае, кипящего чайника. Пульверизатор даст более крупные капли, чем увлажнитель, причем по-разному настроенные пульверизаторы дадут разные размеры капель, т.е. в некоторых пределах можно будет подобрать необходимый. «Модельность» эксперимента будет заключаться не только в другом материале частиц, но и в геометрических размерах системы: размеры кустов, деревьев и их теней, показанных на фотографиях, явно превосходят размер если не квартиры, то допустимого для эксперимента рабочего места. Надо будет работать с уменьшенными моделями и нужно будет выбрать правильный размер. От слишком мелких фигурок с использованием относительно крупных капель не удастся получить четкие тени. А большие фигурки потребуют однородности создаваемого вами потока на большей площади и большем расстоянии. Так что нужно будет найти компромиссный размер. Кстати, все перечисленные источники «летящего тумана» дают вовсе не параллельный поток, а расходящийся из маленькой области. Иными словами, получится что-то вроде тени от фонаря, к которому вы стоите слишком близко. Если отодвинуть источник потока подальше от объекта, дающего «тень», то поток станет более похож на параллельный, но при этом сложнее будет сохранить неизменной скорость потока на всем его пути до поверхности, на которой образуется «тень». Так что тут тоже придется искать компромиссное решение.

Четкость тени будет зависеть не только от размеров капель, но и от поверхности, на которую они падают. Если поверхность хорошо смачивается водой, то изображение быстро «растечется» по ней. Если же она достаточно гидрофобна, то капли дольше смогут сохраниться на своих местах – но тоже не слишком долго, пока не станут достаточно крупными. Значит, правильный выбор времени экспозиции здесь тоже будет играть роль. От этих сложностей можно было бы уйти, выбрав вместо капель какие-нибудь твердые частицы – например, манную крупу или муку, но тогда придется придумать, как создать их поток.

Наконец, отдельную задачу представляет визуализация полученной «тени». Когда частицы сухие, то «тень» проявляется в изменении рельефа поверхности, который хорошо заметен при боковом освещении. С водой же придется смотреть на количество капелек на разных участках поверхности (они могут оказаться и на участках тени, только в меньших количествах). Прозрачные бесцветные капельки воды не на любой поверхности хорошо заметны. И если даже граница между «теневыми» и «засвеченными» участками будет хорошо различима глазом (например, за счет смены угла зрения), то сделать ее заметной на фотографии может потребовать особого искусства. Для лучшей различимости капель на поверхности можно попробовать подкрасить воду краской.

Так или иначе, места для творческого экспериментального поиска здесь остается много. Могу только сказать, что мне удалось получить довольно четкие тени от отдельных «веток» модельных мини-деревьев, однако полное воспроизведение картины требует еще большой экспериментальной работы, тщательного подбора параметров, а в конце – еще и оценки, как должны будут измениться эти параметры при изменении геометрического масштаба системы (при переходе к реальным размерам).

Конечно, все приведенные нами оценки – очень приблизительны, их можно критиковать, уточнять, предлагать альтернативные варианты рассмотрения. Однако именно с этой предметной критики, а точнее – с этих первых оценок, дающих для нее пищу, и начинается научное исследование. Начать хотя бы с них – все равно что поздороваться, входя в дом. Конечно, даже такой простой анализ это всегда некоторый труд. Однако если вас интересует физика, то не жалейте своего времени! Иначе этот интерес не перерастет в средство познания мира, а останется лишь средством увеселения.

Пожелаем же терпения и успехов юным читателям в их будущих собственных физических исследованиях!

Литература

1. *Н.П.Каменьщиков*. Астрономические задачи. – М.-Л.: Госиздат, 1923.

Режим доступа: http://www.astronet.ru db/msg/1175422/index.html

2. *А.А.Половинкин*. Основы общего землеведения: учебник для педагогических институтов. – Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1958.

Режим доступа: http://big-archive.ru/geography/basis_of_common_geography/20.php

3. *S.G., Warren, W.J.Wiscombe*. A model for the spectral albedo of snow. II: Snow containing atmospheric aerosols. – Journal of the Atmospheric Sciences, 37:12, 1980.

Режим доступа: http://journals.ametsoc.org/doi/pdf/10.1175/1520-0469(1980)037%3C2734:AMFTSA%3E2.0.CO;2

4. *И.А.Чубик, А.М.Маслов*. Справочник по теплофизическим характеристикам пищевых продуктов и полуфабрикатов. – М.: Пищевая промышленность, 1970.

Режим доступа: http://thermalinfo.ru/svojstva-materialov/materialy-raznye/plotnost-lda-i-snega-teploprovodnost-teploemkost-lda

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2458–М2461 предлагались на XXXVIII Турнире городов.

Автор задач Ф2465–Ф2468 – Д.Александров.

Задачи М2458–М2461, Ф2465–Ф2468

М2458. а) На каждой стороне 10-угольника (не обязательно выпуклого) как на диаметре построили окружность. Может ли оказаться, что все эти окружности имеют общую точку, не совпадающую ни с одной вершиной 10-угольника?
б) Решите ту же задачу для 11-угольника.

Е.Бакаев

М2459. Для положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ докажите неравенство

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^4+\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^4+\ldots+\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^4 \geq$$

$$\geq \frac{x_1}{x_5}+\frac{x_2}{x_6}+\ldots+\frac{x_{n-3}}{x_1}+\frac{x_{n-2}}{x_2}+\frac{x_{n-1}}{x_3}+\frac{x_n}{x_4}.$$

М.Фадин

М2460. Кузнечик умеет прыгать по клетчатой полоске шириной в 1 клетку на 8, 9 или 10 клеток в любую сторону. (Прыжок на k клеток означает, что между начальным и конечным положениями прыжка находятся $k-1$ клеток.) Будем называть натуральное число n пропрыгиваемым, если кузнечик может, начав с некоторой клетки, обойти полоску длины n, побывав на каждой клетке ровно один раз. Докажите, что существует непропрыгиваемое n, большее 50.

Е.Бакаев

М2461. Доминошки 1×2 кладут без наложений на шахматную доску 8×8. При этом доминошки могут вылезать за границу доски, но центр каждой доминошки должен лежать строго внутри доски (не на границе). Положите таким образом на доску: а) хотя бы 40 доминошек; б) хотя бы 41 доминошку; в) более 41 доминошки.

М.Евдокимов

Ф2465. Кот Леопольд сидел на неподвижной дрезине у вертикально стоящего жестко закрепленного на ней щита, повернутого под углом α к направлению рельсов. Два озорных мышонка бросили в него мешок с песком массой m, горизонтальная составляющая начальной скорости которого равна v_0 и направлена вдоль рельсов. Кот успел спрятаться за щит, и мешок, ударившись о щит, сполз по нему в сторону и скатился по насыпи вниз. С какой скоростью поехала дрезина, если масса дрезины с котом M? Трением мешка о щит и дрезины о рельсы можно пренебречь.

Ф2466. В системе, показанной на рисунке 1, $m_1=m$, $m_2=5m$, $M=6m$. Найдите ускорение груза массой M, если между остальными грузами и столом имеется трение с коэффициентом $\mu=0{,}5$. Принять $g=10$ м/с^2, массой блоков и трением в их осях пренебречь.

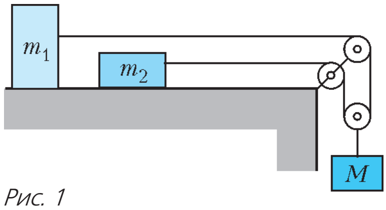


Рис. 1

Ф2467. При подведении теплоты количества $Q = 600$ Дж к смеси гелия и азота при постоянном объеме смесь нагревается на $\Delta T_1 = 15$ К. А если то же количество теплоты подвести к тому же количеству той же смеси при постоянном давлении, то температура смеси повысится на $\Delta T_2 = 10$ К. Найдите отношение числа молекул азота к числу молекул гелия в смеси.

Ф2468. В электрической цепи, изображенной на рисунке 2, все элементы можно

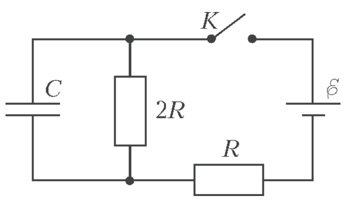


Рис. 2

считать идеальными. В некоторый момент после замыкания ключа тепловые мощности, выделяющиеся на резисторах с сопротивлениями R и $2R$, равны $P_1 = 9$ Вт и $P_2 = 2$ Вт соответственно. С какой скоростью в этот момент растет энергия конденсатора?

Решения задач М2446–М2449, Ф2453–Ф2456

М2446. *а) Десяти ребятам положили в тарелки по 100 макаронин. Есть ребята не хотели и стали играть. Одним действием кто-то из детей перекладывает из своей тарелки по одной макаронине всем другим детям. После какого наименьшего количества действий у всех в тарелках может оказаться разное количество макаронин?*

б) Тот же вопрос, если ребят 100 и одним действием кто-то из детей перекладывает из своей тарелки по одной макаронине некоторым (кому хочет) из остальных.

а) **Ответ.** После 45 действий.

Оценка. Рассмотрим разность числа макаронин у двух детей, скажем из числа Пети вычитается число Васи. Действие Пети уменьшит эту разность на 10, Васи – увеличит на 10, а действия других детей не меняют ее. Поэтому эта разность будет ненулевой тогда и только тогда, когда Петя и Вася сделают разное количество действий. Следовательно, чтобы у всех детей оказалось разное количество макаронин, необходимо сделать хотя бы $0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ действий.

Пример. Первый сделает одно действие, затем второй – 2, третий – 3 и т.д. до девятого включительно. Каждый отдал не более $9 \cdot 9 = 81$ макаронины, его исходных 100 макаронин на это хватило.

б) **Ответ.** После 50 действий.

Пример. Покажем, как количества макаронин могли стать различными после 50 действий. Занумеруем детей от 1 до 100. Пусть k-й ребенок, где $1 \le k \le 50$, переложит по макаронине ребятам с номерами от 51 до $50 + k$. После всех действий у детей окажется 99, 98, …, 50, 150, 149, …, 101 макаронина соответственно.

Оценка. Предположим, было сделано не более 49 действий. Рассмотрим всех детей, не отдававших макароны, таких детей не меньше 51. У каждого из них количество макаронин не уменьшилось по сравнению с начальным, а увеличиться оно могло не более чем на 49. Значит, у каждого из таких детей конечное количество макаронин заключено в диапазоне от 100 до 149 (50 возможностей), поэтому из них найдутся двое с одинаковым количеством макаронин.

С.Дориченко, Н.Чернятьев

М2447. Решение этой задачи см. в статье А.Заславского «О вписанной окружности прямоугольного треугольника».

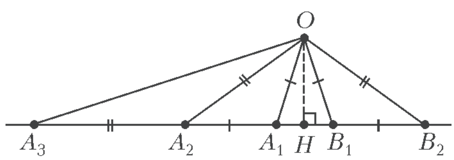
М2448. *На прямой отмечены 100 точек, и еще одна точка отмечена вне прямой. Рассмотрим все треугольники с вершинами в этих точках. Какое наибольшее количество из них могут быть равнобедренными?*

Ответ. 150.

Пусть l – данная прямая, O – отмеченная точка вне ее, H – основание перпендикуляра, опущенного из O на l.

Оценка. Равнобедренные треугольники могут быть двух видов: те, у которых основание лежит на прямой l, и те, у которых не лежит. В первом случае треугольник должен быть симметричен относительно OH, поэтому таких треугольников не больше 50 (для одной вершины X основания вторая определяется однозначно как симметричная точке X относительно OH). Треугольников второго вида с данным основанием OA может быть не более одного, так как вершина определяется пересечением l и серединного перпендикуляра к OA. Поэтому треугольников второго вида не больше 100.

Пример. Проведем от луча OH лучи под углом $18°$ (см. рисунок). Они пересекут l



в точках A_1 и B_1, отметим их. Отложим на l в другую сторону от A_1B_1 отрезок $A_1A_2 = A_1O$, тогда у треугольника OB_1A_2 углы будут равны $72°$, $72°$, $36°$. Затем отложим отрезок $A_2A_3 = A_2O$, …, отрезок $A_{49}A_{50} = A_{49}O$. Аналогично отметим точки $B_2, \ldots, B_{50}$. Равнобедренными будут 50 треугольников OA_iB_i, по 49 треугольников OA_iA_{i+1} и OB_iB_{i+1}, а также треугольники OA_1B_2 и OB_1A_2.

Другая идея, приводящая к решению, – выполнить инверсию с центром O. При инверсии прямая перейдет в окружность, и мы получим вписанный 101-угольник, одна из вершин которого – точка O. Если X' и Y' – образы при инверсии точек X и Y, то треугольники OXY и $OY'X'$ подобны. Значит, вопрос задачи переформулируется следующим образом: каково наибольшее количество равнобедренных треугольников среди треугольников вида OXY, где X и Y – вершины 101-угольника? Одним из оптимальных примеров будет являться правильный 101-угольник.

Е.Бакаев, И.Богданов

М2449*. *На прямой сидит конечное число лягушек в различных целых точках. За ход ровно одна лягушка прыгает на 1 вправо, причем лягушки по-прежнему должны находиться в различных точках. Мы вычислили, сколькими способами лягушки могут сделать n ходов (для некоторого начального расположения лягушек). Докажите, что если бы мы разрешили тем же лягушкам прыгать влево, запретив прыгать вправо, то способов сделать n ходов было бы столько же.*

Назовем *шаблоном* последовательность из n команд «Налево» или «Направо», где k-я команда указывает, в каком направлении на k-м ходу должна прыгнуть одна из лягушек. Докажем более общее утверждение: количество способов из данной позиции сделать n ходов (выполняя команды) так, чтобы лягушки не запрыгивали друг на друга, не зависит от шаблона. (Утверждение задачи тогда является частным случаем для шаблона, состоящего из одних команд «Направо», и шаблона, состоящего из одних команд «Налево».)

Лемма 1. *Изменение последней команды шаблона не меняет количество способов.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную позицию перед последним ходом. Каждая позиция разбивается на группы подряд сидящих лягушек. Количество способов получить из нее финальную позицию независимо от последней команды шаблона равно количеству групп, поскольку из каждой группы только одна лягушка может прыгнуть влево и одна – вправо.

Лемма 2. *Замена двух соседних команд шаблона не меняет количество способов.*

Доказательство. Пусть два шаблона отличаются только в ходах k и $k+1$, так что в первом шаблоне k-я команда – «Налево» и $(k+1)$-я – «Направо», а во втором шаблоне – наоборот: k-я команда – «Направо» и $(k+1)$-я – «Налево». Рассмотрим произвольную позицию А перед k-м ходом. Покажем, как сопоставить каждому способу сделать два следующих прыжка по первому шаблону, приводящему к некоторой позиции Б, способ сделать два следующих прыжка по второму шаблону, приводящий к той же позиции Б. (Этого будет достаточно, поскольку дальнейшая последовательность команд в шаблонах одна и та же.)

Пусть из позиции А сделаны два прыжка разными лягушками (сначала Л1 прыгает налево, потом Л2 – направо). Этому способу сопоставим способ, в котором те же лягушки прыгают в другом порядке (сначала Л2 направо, затем Л1 налево). При этом ясно, что лягушки не запрыгнут друг на друга и в обоих вариантах получается одна и та же конечная позиция. Пусть теперь из позиции А сделаны два прыжка одной лягушкой по первому шаблону (сначала налево, затем направо), тогда эта лягушка обязана быть самой левой в своей группе подряд сидящих лягушек. Такому способу соответствует способ сделать два прыжка (сначала направо, затем налево) самой правой лягушкой той же группы лягушек. Оба варианта не меняют позицию. Лемма доказана.

Остается заметить, что с помощью операций, указанных в леммах, можно от любого шаблона перейти к любому другому: операциями из леммы 2 можно как угодно переставлять команды, а операциями из леммы 1 – менять число команд «Налево» (предварительно переставляя с помощью леммы 1 команду, которую нужно заменить, на последнее место).

И.Богданов

Ф2453. *Один моль золота нагрели от 0 К до 336 К, при этом внутренняя энергия золота увеличилась на 5,2 кДж. Известно, что при температурах ниже так называемой температуры Дебая T_D молярная теплоемкость C твердых тел растет с температурой по закону $C = \alpha T^3$, а при температурах выше T_D для твердых тел справедлив закон Дюлонга и Пти: $C = 3R$ (где $R = 8,31$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная). Оцените температуру Дебая для золота.*

Чтобы теплоемкости «стыковались» при температуре Дебая, должно выполняться соотношение $\alpha T_D^3 = 3R$, откуда следует $\alpha = 3R/T_D^3$. Тогда при нагреве от 0 К до T_D один моль вещества в твердом состоянии получит количество теплоты

$$Q_1 = \frac{3}{4} R T_D .$$

А поскольку моль золота нагревают до температуры 336 К, то он получит еще дополнительное количество теплоты

$$Q_2 = (336\ \text{К} - T_D) \cdot 3R .$$

В итоге изменение внутренней энергии одного моля золота составит

$$Q_1 + Q_2 = \frac{3}{4} R T_D + (336\ \text{К} - T_D) \cdot 3R = 5,2\ \text{кДж}.$$

Из этого уравнения получаем искомую температуру:

$$T_D = 168\ \text{К} .$$

Т.Золотов

Ф2454. *Расстояние между двумя одинаковыми высотными домами равно $L = 150$ м. Между домами натянуты провода так, что вблизи мест крепления они составляют с горизонтом одинаковые малые углы $\alpha = 5°$. Взобравшись на крышу, школьник Вася проводит опасный эксперимент. Он ударяет палкой по проводу вблизи места крепления и измеряет время, через которое бегущее по проводу «возмущение» возвращается к Васе после отражения от другого конца проволоки. Каков результат измерения Васи?*

Если масса участка провода между двумя опорами равна M, то линейная плотность провода составляет M/L. Угол 5° весьма мал, и его косинус, равный 0,996, близок к единице. Это означает, что проекция силы натяжения провода вблизи опоры, равная силе натяжения провода в самой нижней точке между двумя опорами, мало отличается от величины F самой этой силы. Равновесное положение провода соответствует силе натяжения провода вблизи опор, равной

$$F = \frac{Mg}{2\sin\alpha}.$$

Скорость распространения волн по натянутому проводу определяется соотношением

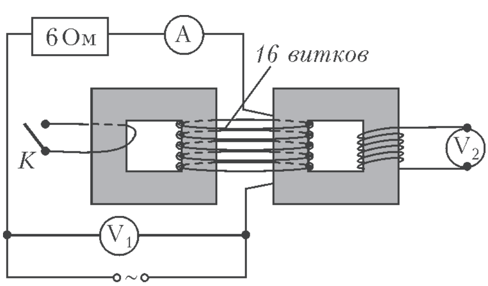
$$v = \sqrt{\frac{FL}{M}} = \sqrt{\frac{Lg}{2\sin\alpha}} = 92{,}7 \text{ м/с}.$$

(При этом изгибная жесткость провода не учитывается.) Время движения возмущения (волны) по проводу туда и обратно составит

$$\Delta t = \frac{2L}{v} = \sqrt{\frac{8L\sin\alpha}{g}} \approx 3{,}2 \text{ с}.$$

Э.Васин

Ф2455. *Проволочная обмотка из 16 витков охватывает два одинаковых сердечника, сделанных из материала с большой магнитной проницаемостью* μ. *Цепь, изображенная на рисунке, подключена к источнику переменного синусоидального*



напряжения. Показания идеальных приборов таковы: $U_1 = U_2 = 10$ *В*, $I = 1$ *А. Какое число витков имеет катушка, к которой подключен вольтметр* V_2*? Что будут показывать приборы, если замкнуть ключ K? Сопротивления проводов катушек малы.*

Пока ключ не замкнут, магнитные потоки в сердечниках трансформаторов одинаковы. В цепи, включающей в себя резистор и амперметр, напряжение на резисторе равно $U_р = 6$ В, а на резисторе и последовательно включенной катушке из 16 витков напряжение равно напряжению источника $U_1 = 10$ В. Отсюда следует, что на катушке напряжение равно $U_к = \sqrt{U_1^2 - U_р^2} = 8$ В и сопротивление катушки составляет 8 Ом. Это напряжение в 8 вольт пропорционально максимальной скорости изменения суммарного магнитного потока в двух сердечниках и числу витков в катушке:

$$U_к \sim 2\left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right)_{max} \cdot 16.$$

Второй вольтметр показывает напряжение 10В, которое пропорционально той же скорости изменения магнитного потока и числу витков N правой катушки:

$$U_2 \sim \left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right)_{max} \cdot N.$$

Из этих соотношений находим число витков катушки, к которой подключен вольтметр V_2:

$$N = 40.$$

После замыкания ключа первый вольтметр не изменит своего показания и будет показывать те же 10 В, так как он подключен непосредственно к источнику:

$$U_1' = U_1 = 10 \text{ В}.$$

Сердечник слева имеет короткозамкнутый виток, и при любом не равном нулю переменном магнитном потоке в этом сердечнике по короткозамкнутому витку потечет бесконечно большой ток. Из этого следует, что магнитный поток в этом сердечнике не меняется, т.е. магнитные поля, созданные током в обмотке с 16 витками и в одном витке с замкнутым ключом, компенсируют друг друга. Иными словами, в цепи с резистором и амперметром «остался» только один сердечник – правый. Сопротивление катушки с 16 витками и двумя сердечниками до замыкания ключа было равно 8 Ом, а та же катушка, но только с одним сердечником, имеет сопротивление 4 Ом. Отсюда следует, что амперметр покажет ток

$$I_1 = \frac{10 \text{ В}}{\sqrt{6^2 + 4^2} \text{ Ом}} \approx 1{,}4 \text{ А}.$$

Обмотка из шестнадцати витков создает в сердечнике слева магнитное поле, пропорциональное величине тока I_1 и количеству витков, тогда в одном короткозамкнутом витке потечет ток $I_2 = I_1 \cdot 16 \approx 22{,}4$ А. Напряжение, которое будет показывать второй вольтметр, пропорционально амплитуде текущего через него тока. Так как ток увеличился в $I_1/I \approx 1{,}4$ раза, то и напряжение тоже увеличится и станет равным

$$U_2' \approx 1{,}4U_2 \approx 14 \text{ В}.$$

С.Варламов

Ф2456. *Астрофизиками обнаружены газовые облака, движущиеся по почти круговым орбитам вокруг центра нашей Галактики. Такой вывод был сделан на основании результатов наблюдений за свечением этих облаков. Оказалось, что частоты f в спектрах излучения молекул или атомов газовых облаков изменяются по гармоническому закону с периодом порядка 10 лет вблизи соответствующих частот f_0 неподвижных атомов и молекул таких же газов. Причем выполняется такое соотношение: $(f_{\max} - f_{\min})/f_0 \approx \approx 10^{-3}$. Оцените массу объекта (черной дыры), находящегося в центре нашей Галактики.*

Солнечная система располагается вблизи края нашей Галактики, поэтому наблюдаемое движение газовых облаков происходит в плоскости, в которой находится и наша Земля. Вследствие эффекта Доплера частоты волн, излучаемых молекулами или атомами в те моменты, когда скорость v их орбитального движения направлена к Земле или от Земли, отличаются от частот излучения f_0 неподвижных атомов или молекул в $(c+v)/c$ или $(c-v)/c$ раз соответственно. Иными словами, выполняется соотношение

$$\frac{2v}{c} = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{f_0} \approx 10^{-3}.$$

Это означает, что газовые облака движутся со скоростями орбитального движения

$$v = \frac{c(f_{\max} - f_{\min})}{2f_0} = 150 \text{ км/с},$$

составляющими 0,05% от скорости света в вакууме. Движение происходит по круговым орбитам с периодом

$$T = 10 \text{ лет} = 3{,}16 \cdot 10^8 \text{ с}.$$

Расстояние от облаков до центра нашей Галактики, в котором находится черная дыра, составляет

$$R = \frac{vT}{2\pi}.$$

Ускорение, с которым движутся эти облака, обеспечивается гравитационным притяжением к черной дыре массой M:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2},$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравитационная постоянная. Отсюда находим массу черной дыры:

$$M = \frac{v^2 R}{G} = \frac{v^3 T}{2\pi G} = 2{,}54 \cdot 10^{33} \text{ кг}.$$

В.Славутинский

О вписанной окружности прямоугольного треугольника

А.Заславский

На листе относительно клетчатом,
Но на белом и чистом зато
Я пишу бледно-серое нечто,
Смахивающее на ничто.

А.Великий

Начнем с двух задач, недавно предлагавшихся на олимпиадах.

Задача 1 (М2447, XXXVIII Турнир городов). *Докажите, что в прямоугольном треугольнике ортоцентр треугольника, образованного точками касания сторон с вписанной окружностью, лежит на высоте, проведенной из прямого угла (рис.1).*

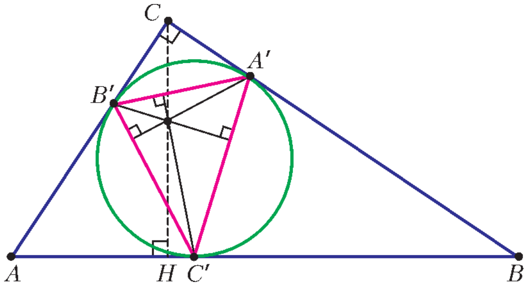


Рис. 1

Решение. Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 90°$; A', B', C' – точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB; CH – высота (рис.2). Так как $B'C'$ образует равные углы с прямыми AC, AB, высота из вершины A' образует равные углы с перпендикулярными им прямыми CB, CH. Следовательно, эта высота пересекает CH в такой точке H', что $CH' = CA'$. Поскольку $CA' = CB'$, высота из B' также проходит через H'.

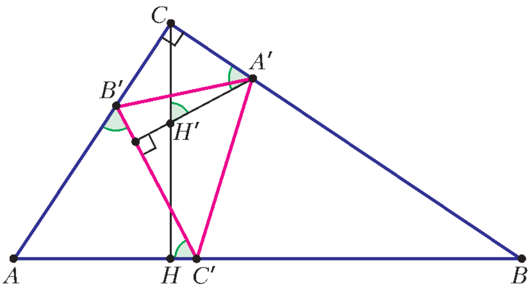


Рис. 2

Примечание. Если I – центр вписанной окружности треугольника ABC, а r – ее радиус, то $IA'CB'$ – квадрат. Поэтому из приведенного решения следует также, что $CH' = r$.

Упражнения

1. Докажите, что основания высот треугольника $A'B'C'$, проведенных из A' и B', являются точками пересечения биссектрис углов B и A соответственно со средней линией треугольника ABC, а вместе с точками C и C' они являются четверкой вершин параллелограмма.

2. Пусть в произвольном треугольнике KLM точка O' – точка, симметричная центру описанной окружности O относительно прямой KL, H – ортоцентр. Докажите, что четырехугольник $MOO'H$ является параллелограммом (возможно вырожденным). Получите другое решение задачи 1, применив этот факт к треугольнику $A'B'C'$.

Задача 2 (XIII Олимпиада имени И.Ф.Шарыгина, заочный тур). *В прямоугольном треугольнике ABC точка C_0 – середина гипотенузы AB; AA_1, BB_1 – биссектрисы; I – центр вписанной окружности. Докажите, что прямые C_0I и A_1B_1 пересекаются на высоте, проведенной из вершины C.*

Решение. Воспользуемся следующим фактом (верным для любого треугольника).

Лемма. *Прямая C_0I пересекает высоту CH в точке, лежащей на расстоянии r от вершины C.*

Действительно, пусть C'' – точка касания стороны AB с вневписанной окружностью, а C_2 – точка вписанной окружности, диаметрально противоположная C' (рис. 3). Точка C – центр гомотетии вписанной и вневписанной окружностей, при этом C_2 и C'' – соответствующие («верхние») точки окружностей, значит, C, C_2, C'' лежат на одной прямой. Кроме того, $C'C_0 = C''C_0$, т.е. C_0I – средняя линия треугольника $C'C''C_2$, и $C_0I \parallel CC_2$. Значит, прямые CC_2, C_2I, C_0I и CH образуют параллелограмм, откуда и следует утверждение леммы.

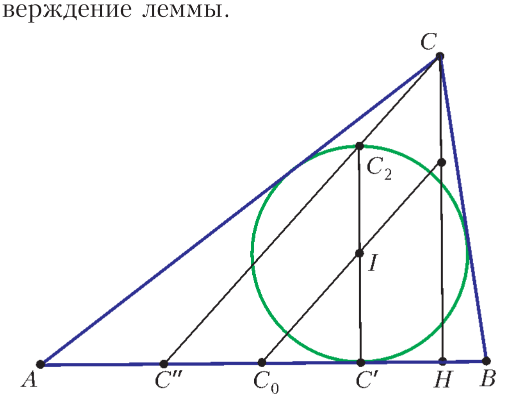


Рис. 3

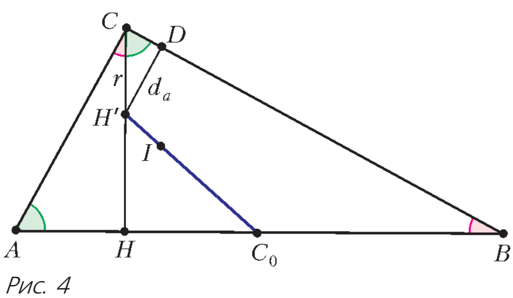


Рис. 4

Вернемся к задаче. Обозначим точку пересечения C_0I и CH через H' (рис.4). Так как $CH' = r$, расстояния от H' до прямых BC, CA и AB равны, соответственно,

$$d_a = r\cos\angle HCB = r\cos\angle BAC = r \cdot AC/AB,$$

$$d_b = r \cdot BC/AB \text{ и } d_c = CH - r.$$

Поскольку удвоенная площадь треугольника равна $(AB+BC+CA)r = AB \cdot CH$, из этих равенств следует, что $d_c = d_a + d_b$. Очевидно, что этим свойством обладают также расстояния от точек A_1, B_1 до прямых BC, CA и AB. По теореме Фалеса нетрудно вывести, что все точки, обладающие этим свойством, лежат на прямой A_1B_1 (подробно об этом можно прочесть в статье А.Карлюченко и Г.Филипповского «Лемма биссектрального треугольника» в «Кванте» №2 за 2016 г.).

Из примечания к задаче 1 видно, что в обеих задачах речь шла об одной и той же точке. Поэтому из утверждений задач 1 и 2 следует, что:

– ортоцентр треугольника $A'B'C'$ лежит на прямой A_1B_1;

– ортоцентр треугольника $A'B'C'$ лежит на прямой C_0I.

Поскольку C_0 – центр описанной окружности треугольника ABC, последнее утверждение является частным случаем следующего общего факта (этот факт уже появлялся в «Задачнике «Кванта» – см. задачу М1819):

В треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, I – центр вписанной окружности, A', B', C' – точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB. Тогда ортоцентр треугольника $A'B'C'$ лежит на прямой OI.

Об этом факте можно прочитать также в статье К.Козеренко и П.Факанова «Птолемеева ось треугольника» в «Кванте» №2 этого года.

Упражнение 3. Докажите, используя рисунок 5, что $OI/IH' = R/r$, и получите отсюда другое решение задачи 1.

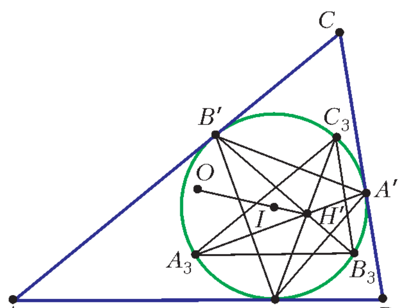


Рис. 5

Задача 3. *Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 90°$ и $AC \neq BC$. Докажите, что прямая $A'B'$, касательная к описанной окружности треугольника ABC, проведенная в точке C, и прямая, проходящая через I и параллельная AB, пересекаются в одной точке.*

Решение. Пусть SC – касательная к описанной окружности, а точка S на ней такова, что $SI \parallel AB$ (рис.6). Тогда

$$\angle SCI = \angle SCA + \angle ACI = \angle ABC + \angle ACB/2,$$

$$\angle SIC = \angle ABC + \angle BCI = \angle ABC + \angle ACB/2.$$

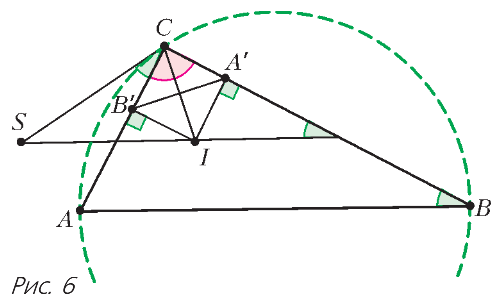


Рис. 6

Равенство $\angle SCI = \angle SIC$ означает, что треугольник CSI равнобедренный: $SI = SC$. Но так как $CB'IA'$ – квадрат, прямая $A'B'$ – это серединный перпендикуляр к CI, значит, $A'B'$ проходит через S.

Оказывается, через точку S из предыдущей задачи проходит и прямая A_1B_1, соединяющая основания биссектрис, и прямая, соединяющая точки касания вневписанных окружностей с катетами.

Для того чтобы это установить, удобно воспользоваться свойствами двойных отношений четверок точек. Сформулируем их в виде упражнений. Если решение упражнений вызовет трудности, можно обратиться к статье В.Тадеева «Простые, двойные, гармонические» (см. «Квант» №7 за 1982 г.).

Определение 1. *Двойным отношением* четырех точек A, B, C и D, лежащих на одной прямой, называется действительное число

$$(ABCD) = \frac{\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right)}{\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}\right)}.$$

Упражнение 4. Докажите, что двойное отношение сохраняется при *центральной проекции*, т.е. если O – произвольная точка и прямые OA, OB, OC и OD пересекают произвольную прямую l' в точках A', B', C' и D' соответственно, то $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Определение 2. *Двойным отношением четырех прямых OA, OB, OC и OD* называется двойное отношение четырех точек, в которых они пересекают произвольную пятую прямую.

Определение 3. Четверка точек A, B, C, D называется *гармонической*, если $(ABCD) = -1$. Специальный случай гармонической четверки возникает, когда C – середина отрезка AB, а D – бесконечно удаленная точка.

Аналогично определяется гармоническая четверка прямых.

Упражнение 5. Докажите, что:

– внешняя и внутренняя биссектрисы угла треугольника вместе с двумя его сторонами образуют гармоническую четверку прямых;

– две стороны треугольника, медиана, проведенная к третьей стороне, и прямая, параллельная этой стороне и проходящая через противоположную вершину, образуют гармоническую четверку.

Вернемся к исследованию нашей конфигурации.

Задача 4. *Докажите, что в условиях задачи 3 прямая A_1B_1 проходит через точку S.*

Решение. Пусть касательная в точке C пересекает прямую A_1B_1 в точке K. Достаточно показать, что $IK \parallel AB$, тогда K будет совпадать с S.

Так как $\angle KCA = \angle ABC = \angle ACH$, прямые CA, CB, CH, CK образуют гармоническую четверку. Следовательно, гармоническими будут также четверка точек B_1, A_1, H', K и четверка прямых IA, IB, IC_0, IK. Поскольку C_0 – середина AB, получаем, что $IK \parallel AB$ (рис.7).

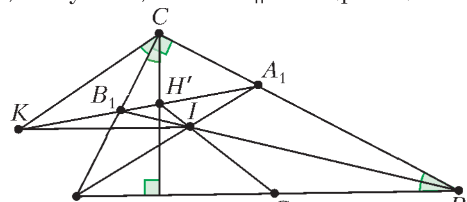


Рис. 7

Упражнения

6. Докажите, что в условиях задачи 3 через точку S проходит прямая $A''B''$, где A'' и B'' – точки касания катетов с соответствующими вневписанными окружностями (рис.8).

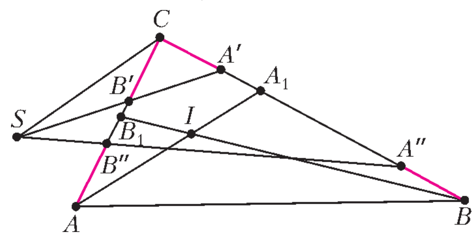


Рис. 8

Указание. Четверки точек C, A_1, A', A'' и C, B_1, B', B'' – гармонические.

7. Докажите, что в любом треугольнике четыре прямые, соединяющие

– точки касания двух сторон с вписанной окружностью,

– точки касания этих сторон с соответствующими вневписанными окружностями,

– основания проведенных к этим сторонам высот,

– основания проведенных к этим сторонам биссектрис

пересекаются в одной точке (либо параллельны).

Выявите связь этого общего факта с задачей 4 и упражнением 6.

Указание. Используйте двойные отношения четверок точек.

Задача с кружка, или Еще раз о задаче М2447

М.Панов

Появление на олимпиаде – зачастую лишь начало интересной жизни задачи. Этот рассказ – об интересных превращениях, которые случились с одной геометрической задачей, все с той же задачей М2447, которая обсуждается в статье А.Заславского из этого номера:

Задача. *Докажите, что в прямоугольном треугольнике ABC ортоцентр H' треугольника $A'B'C'$, образованного точками касания сторон с вписанной окружностью, лежит на высоте CH, проведенной из вершины прямого угла.*

Эта задача предлагалась на весеннем туре Турнира городов 2016 года. После олимпиады задачу стали обсуждать на геометрическом кружке Р.К.Гордина в 57 школе.

На кружке школьники рассказали очень красивое решение, придуманное еще во время турнира. Известно, что для любого треугольника ABC верна теорема Гамильтона: вектор $\overrightarrow{OH}$ равен сумме векторов $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, где O и H – центр описанной окружности и ортоцентр (докажите это!). Поскольку в нашей задаче I – центр описанной окружности треугольника $A'B'C'$, то $\overrightarrow{IH'}=\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{IC'}$ (рис. 1). Осталось заметить, что $CA'IB'$ – квадрат, т.е. $\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}=\overrightarrow{IC}$, и что $IC' \parallel CH'$.

Один из участников кружка, Д.Минеев, заметил (используя программу для геометрических построений geogebra), что

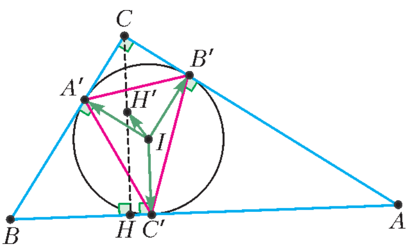


Рис. 1

через тот же ортоцентр проходят еще две прямые: прямая A_1B_1, где A_1, B_1 – основания биссектрис острых углов, и прямая C_0I, где I – центр вписанной окружности данного треугольника ABC, а C_0 – середина гипотенузы AB (она же центр описанной окружности треугольника ABC). Получилось такое обобщение.

Обобщение 1. *В прямоугольном треугольнике ABC точка C_0 – середина гипотенузы AB; AA_1, BB_1 – биссектрисы; I – центр вписанной окружности. Докажите, что прямые C_0I и A_1B_1 пересекаются на высоте CH, проведенной из вершины C.*

Это обобщение – точная копия задачи 2 из упомянутой статьи А.Заславского. Тогда на кружке все принялись доказывать это обобщение. Решить задачу удалось, причем несколькими способами. Д.Глуховский из 11 класса решил ее с помощью центра масс. (Об этом методе можно прочитать в книге М.Балка, В.Болтянского «Геометрия масс» серии «Библиотечка «Квант».) Он поместил подходящие массы в точки A, B, C и C_0 так, чтобы центр масс системы лежал на каждой из трех нужных прямых: в точку A поместил массу a^2+ab, в точку B – массу $ab+b^2$, в точку C – массу $ac+bc$, а в точку C_0 – отрицательную массу $(-2ab)$, где $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$. Читатель может в качестве упражнения провести нужные группировки масс и окончить доказательство.

Но оказалось, что в этом решении тот факт, что треугольник прямоугольный, используется ровно один раз – когда вычисляется отношение $AH:BH=b^2:a^2$. В произвольном треугольнике ABC точка S, делящая сторону AB в отношении $AS:BS=AC^2:BC^2$, – это основание *симедианы.* Симедиана – это прямая, симметричная медиане треугольника относительно соответствующей биссектрисы (о симедиане можно прочитать, например, в статье Ю.Блинкова в «Кванте» №4 за 2015 г.). Получается, что это решение с массами доказывает следующее обобщение.

Обобщение 2. *В произвольном треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1, пересекающиеся в точке I (центре вписанной окружности); C_0 – середина AB; прямые A_1B_1 и C_0I пересекаются в точке N. Тогда CN – симедиана, т.е. $\angle ACN=\angle BCC_0$.*

На этом дело на закончилось: Д.Креков сказал, что не обязательно, чтобы C_0 была серединой, и сформулировал очередное обобщение.

Обобщение 3. *В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1, пересекающиеся в точке I (центре вписанной окружности); M – произвольная точка на AB; прямые A_1B_1 и MI пересекаются в точке N. Тогда $\angle ACN=\angle BCM$ (рис.2).*

У этой задачи нашлись два решения. В каждом решении вместо равенства $\angle ACN=\angle BCM$ доказывается эквивалентное тригонометрическое равенство

$$\frac{\sin\angle NCA}{\sin\angle NCI}=\frac{\sin\angle BCM}{\sin\angle BCI},$$

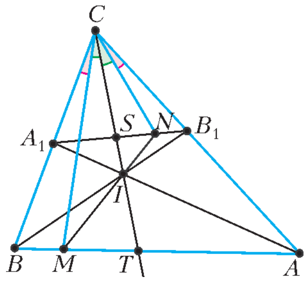


Рис. 2

или
$$\frac{\sin\angle ACN}{\sin\angle NCB}=\frac{\sin\angle BCM}{\sin\angle MCA}.$$
(Строгое обоснование эквивалентности можно провести, исходя из монотонности функции $f(x)=\frac{\sin(\alpha-x)}{\sin x}$ на интервале $0<x<\alpha$, где α – фиксированный угол, $0<\alpha<\pi$.)

В первом решении после многократного применения теоремы Чевы в форме синусов (для треугольников B_1CI, BCI и ABB_1) получалось соотношение
$$\frac{\sin\angle NCA}{\sin\angle NCI}=\frac{\sin\angle BCM}{\sin\angle BCI}$$
(получите его!).

Другой способ придумал М.Волчкевич. Пусть NX, NY, NZ – перпендикуляры из N на стороны AC, BC, AB; MV, MW – перпендикуляры из M на стороны AC, BC. Вспомним известное свойство прямой A_1B_1: для любой точки отрезка A_1B_1 сумма расстояний от нее до прямой AB равна сумме расстояний до прямых AC и BC (см., например, статью А.Карлюченко и Г.Филипповского «Лемма биссектрального треугольника» в «Кванте» №2 за 2016 г.). С помощью этого свойства можно вывести соотношение
$$\frac{NX}{NY}=\frac{MW}{MV},$$
что равносильно равенству
$$\frac{\sin\angle ACN}{\sin\angle NCB}=\frac{\sin\angle BCM}{\sin\angle MCA}.$$
Предлагаем читателю восстановить все детали этого красивого решения.

Ну и, наконец, уже после всего произошедшего на кружке задача была показана М.Евдокимову, и он предложил еще одно обобщение.

Обобщение 4. *В треугольнике ABC проведена биссектриса угла C и на ней взята произвольная точка I. Прямые AI и BI пересекают стороны BC и AC в точках A_1 и B_1; M – произвольная точка на AB; прямые A_1B_1 и MI пересекаются в точке N. Тогда $\angle ACN=\angle BCM$.*

А доказательство получилось короткое, практически в одну строчку. Техническую работу с отношениями синусов или расстояний заменила работа с двойными отношениями четверок точек и прямых (об этом также можно прочитать в статье А.Заславского).

Пусть S, T – пересечения биссектрисы CI с прямыми A_1B_1 и AB соответственно. При центральной проекции из точки I с прямой AB на прямую A_1B_1: $A\mapsto A_1$, $M\mapsto N$, $B\mapsto B_1$, $T\mapsto S$. Из сохранения двойного отношения при центральном проектировании получаем
$$\frac{A_1S}{B_1S}:\frac{A_1N}{B_1N}=\frac{AT}{BT}:\frac{AM}{BM}.$$
Это соотношение можно переписать в виде равенства
$$\frac{\sin\angle A_1CS}{\sin\angle B_1CS}:\frac{\sin\angle A_1CN}{\sin\angle B_1CN}=$$
$$=\frac{\sin\angle ACT}{\sin\angle BCT}:\frac{\sin\angle ACM}{\sin\angle BCM},$$
или
$$\frac{\sin\angle BCN}{\sin\angle ACN}=\frac{\sin\angle ACM}{\sin\angle BCM}.$$

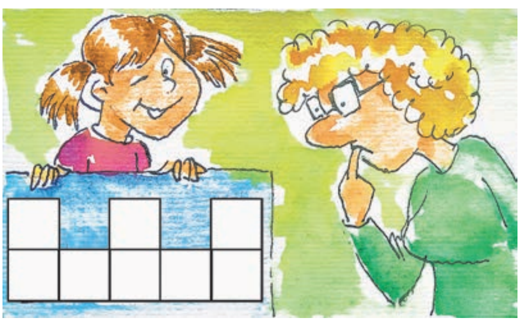
Задачи

1. Среди всех граней восьми одинаковых по размеру кубиков треть синие, а остальные – красные. Из этих кубиков сложили большой куб. Теперь среди видимых граней кубиков

ровно треть – красные. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб, полностью красный снаружи.

А.Шаповалов

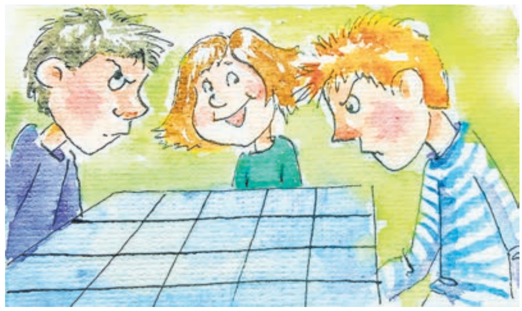
2. Можно ли так расставить цифры 1, 2, ..., 8 в клетках буквы Ш (см. рисунок), чтобы при любом разреза-



нии фигуры на две части сумма всех цифр в одной из частей делилась на сумму всех цифр в другой? Резать можно только по границам клеток. В каждой клетке должна стоять одна цифра, каждую цифру можно использовать только один раз.

А.Шаповалов

3. В большой квадратный зал привезли два квадратных ковра таких, что сторона одного ковра вдвое больше



стороны другого. Когда их положили в противоположные углы зала, они в два слоя накрыли 4 м^2, а когда их положили в соседние углы, то они накрыли 14 м^2. Каковы размеры зала?

Д.Калинин

4. В каждой клетке доски размером 5×5 стоит крестик или нолик, причем никакие три крестика не стоят подряд ни по горизонтали, ни по вертикали, ни по диагонали. Какое наибольшее количество крестиков может быть на доске?

М.Евдокимов

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Задачи 1 и 2 предлагались на XXVIII Математическом празднике, задачи 3 и 4 предлагались на XV Устной московской олимпиаде по математике для 6–7 классов.

Какие бывают опоры

С.ДВОРЯНИНОВ

Опоры бывают разные. Например, подпорная стенка – распространенный элемент многих строительных конструкций. Часто они встречаются в горах (рис.1). Подпорные стенки поддерживают также берега рек и защищают их от размывания. Расположенный выше стенки грунт оказывает на стенку давление

Рис. 1

(рис.2), порой весьма значительное. Отметим, что плотины и дамбы – это те же опорные стенки.

Разнообразные опоры удерживают провода линий электропередачи, сокращенно

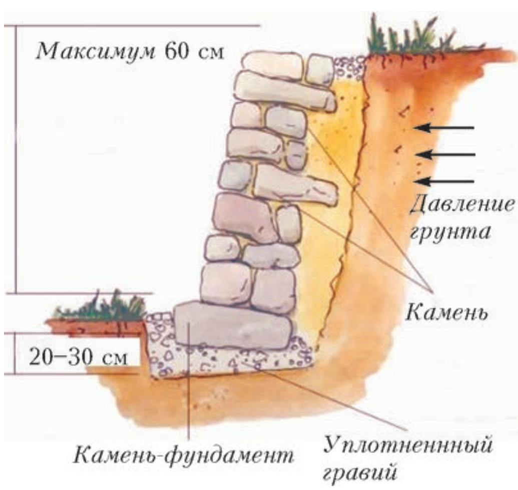


Рис. 2

– ЛЭП. Пусть столбы такой линии стоят на равных расстояниях один от другого вдоль прямой линии. И вдруг у очередного столба с левой стороны появляется дополнительная наклонная балка (рис.3). Как вы думаете, куда поворачивает в этом месте ЛЭП – направо или налево?

Рис. 3

Рассмотрим опоры, стоящие вдоль прямой. Каждую такую опору подходящие к ней провода тянут в разные стороны. При этом действующие на опору силы уравновешивают друг друга. Результирующая всех сил, приложенных к опоре, равна нулю. При повороте подвешенные провода создают силу, которая приложена к опоре и направлена в сторону поворота (она получается по правилу параллелограмма и не равна нулю). Дополнительная опора препятствует действию этой силы. Если дополнительная опора появилась слева по ходу, значит, ЛЭП в этом месте поворачивает налево.

Опоры бывают и у мостов, соединяющих берега реки. Если река широкая и одного пролета моста не хватает, то два соседних пролета помещают на опору, называемую быком. Бык воспринимает нагрузку от этих пролетов.

На рисунке 4 вы видите знаменитый

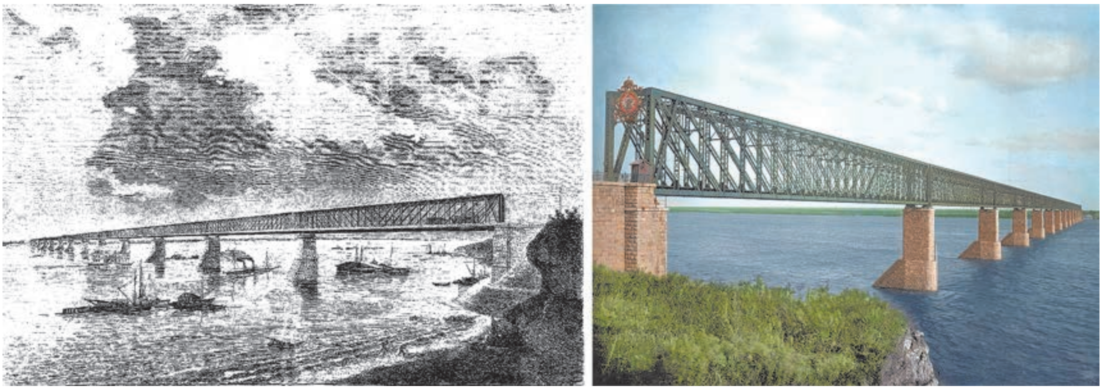


Рис. 4

Сызранский мост через Волгу, названный при открытии в 1880 году Александровским – в честь 25-летия правления императора Александра II. Тогда он был самым длинным мостом Европы (1436 метров, 13 пролетов). Очевидно, что быки моста несимметричны: с одной стороны мы видим выступающие из воды дополнительные сооружения. Как вам кажется, в каком направлении течет Волга – слева направо или справа налево?

Дополнительные сооружения, на которые мы обратили ваше внимание, это водорезы или ледорезы. Они принимают на себя давление потока воды и защищают быки от льдин во время ледохода. Их ставят со стороны верховой части водотока. Так что они не поддерживают быки, как могло бы показаться на первый взгляд, а защищают их (водорезы имеют обтекаемую форму). Так что течет Волга слева направо.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Молекулярно-кинетическая теория и характеристики вещества

С.ВАРЛАМОВ

Модуль объемной упругости

Если к собственному давлению вещества добавляется внешнее давление, то среднее расстояние между молекулами становится немного меньше. Соседние молекулы отталкиваются друг от друга, и можно считать, что эта сила распределена по площади, равной D^2. Внешнее давление обеспечивает, таким образом, дополнительную силу, равную $p_{\text{вн}}D^2$. Из модели Леннарда–Джонса можно получить силу, с которой взаимодействуют две соседние молекулы, пренебрегая взаимодействием с более удаленными друг от друга молекулами:

$$-12\frac{U_0}{D}\left(\frac{D}{D+x}\right)^{13}+12\frac{U_0}{D}\left(\frac{D}{D+x}\right)^{7}+D^2p_{\text{вн}}=0.$$

Отсюда находим искомое расстояние:

$$x=-\frac{D^4p_{\text{вн}}}{72U_0}.$$

Относительное изменение линейных размеров при наличии внешнего давления $p_{\text{вн}}$

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

равно $\beta = x/D$. Модуль (коэффициент) объемной упругости G находится из условия

$$-3\beta G = p_{\text{вн}}$$

и равен

$$G = -\frac{p_{\text{вн}}}{3\beta} = \frac{24U_0}{D^3} = \frac{4L\rho}{\mathrm{M}} = 2p_{\text{соб}}.$$

Тепловое расширение при фиксированном внешнем давлении

При колебаниях одной молекулы вблизи среднего положения равновесия в направлении одной из ближайших соседок, в соответствии с моделью Леннарда–Джонса, должна расти средняя по времени сила отталкивания этих двух молекул. Если колебания описываются (примерно) гармонической функцией времени $x_{\max}\cos\omega t$, то для колебаний вдоль оси x изменение потенциальной энергии взаимодействия этой пары молекул можно описать формулой

$$U = U_0\left(\left(\frac{D}{D+x}\right)^{12} - 2\left(\frac{D}{D+x}\right)^{6}\right) \approx$$
$$\approx 36U_0\left(\frac{x}{D}\right)^2 - 252U_0\left(\frac{x}{D}\right)^3 +$$
$$+1113U_0\left(\frac{x}{D}\right)^4 + \ldots.$$

Сила взаимодействия молекул равна

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \approx -72U_0\left(\frac{1}{D}\right)^2 x +$$
$$+\ 756U_0\left(\frac{1}{D}\right)^3 x^2 - 4452U_0\left(\frac{1}{D}\right)^4 x^3 + \ldots$$

Среднее значение для x^2 при тепловых колебаниях мы теперь знаем, а третьим слагаемым, пропорциональным x^3, мы пренебрегаем. Чтобы среднее по времени значение силы осталось равным нулю, молекулы должны в среднем удалиться друг от друга на расстояние $\Delta x \approx 0{,}146DkT/U_0$. Таким образом, при низких температурах тепловой коэффициент линейного расширения конденсированного вещества равен

$$\gamma = \frac{0{,}146k}{U_0}.$$

Коэффициент объемного теплового расширения вещества в конденсированном состоянии, естественно, примерно в три раза больше:

$$3\gamma = \frac{0{,}44k}{U_0} \approx \frac{ZR}{5L}.$$

Если умножить коэффициент объемного расширения твердого вещества при температуре, составляющей определенную долю от температуры плавления, например при $T = T_{\text{пл}}/10$, на температуру плавления вещества, то можно получить безразмерные величины. В таблице 2 приведены относительные величины $T_{\text{пл}}\cdot\gamma$ для большой группы металлов. Из таблицы видно, что относительные величины мало отличаются друг от друга, хотя по механическим и тепловым свойствам (структуре кристаллической решетки, модулю Юнга, температуре плавления и др.) эти металлы отличаются весьма значительно. Конечно, есть и такие вещества, для которых обсуждаемая относительная величина далеко выходит за границы диапазона 0,6–1,2. Например, она больше для урана (1,8), плутония (2,4), цинка (2,5), а для галлия (0,31), индия (0,47) и сурьмы (0,54) она меньше, но эти данные в таблицу не включены.

Таблица 2

Li	Sn	Be	K	Na	Mg	Pb	Ba	Ti
0,60	0,61	0,73	0,81	0,81	0,86	0,87	0,88	0,88
Mo	W	Tl	Ir	Au	B	Zr	Pt	Ca
0,90	0,95	0,97	1,01	1,03	1,03	1,03	1,04	1,10
Al	Cd	Cu	Fe	Ag	Ni	Ta		
1,11	1,14	1,19	1,19	1,22	1,25	1,25		

Следовало бы рассмотреть зависимость коэффициента объемного расширения от температуры (γ растет с ростом температуры), но для ее объяснения выбранной модели взаимодействия молекул недостаточно.

Давление насыщенного пара

Нарисуем зависимости давления одного моля вещества от занимаемого им объема для двух немного отличающихся температур T и $T - \Delta T$ (рис.2). Участки с постоянными давлениями соответствуют одновременному существованию в объеме сосуда и конденсированного и газообразного состояния вещества. Кривые пунктирные линии показывают, как вело бы себя это вещество, если бы оно подчинялось законам идеального газа.

Проведем с этим веществом циклический процесс, в котором две изотермы будут соот-

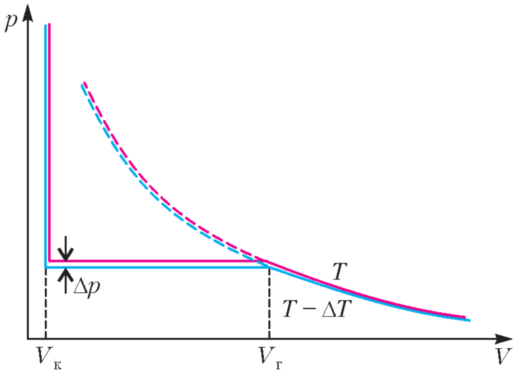


Рис. 2

ветствовать испарению вещества при более высокой температуре и конденсации вещества при более низкой температуре. Соединим эти два участка (на концах) адиабатами. Получится цикл Карно, для которого КПД известен – он равен $\Delta T/T$. Теплота, полученная от «нагревателя», соответствует молярной теплоте испарения при температуре T, а работа газа равна $\Delta p \Delta V$. Как мы уже отмечали, при условии что объем газа много больше объема конденсированного вещества, $\Delta V \approx V_г$. Тогда работа газа за цикл равна

$$\frac{\Delta pRT}{p} = Q\frac{\Delta T}{T} = \left(\frac{ZL}{Z_0} - RT\left(\frac{i}{2} - 1\right)\right)\frac{\Delta T}{T}.$$

Разделим переменные:

$$\frac{\Delta p}{p} = \left(\frac{ZL}{Z_0 R} - T\left(\frac{i}{2} - 1\right)\right)\frac{\Delta T}{T^2}.$$

Это уравнение (уравнение Клапейрона–Клаузиуса) имеет такое решение:

$$\ln\frac{p}{p_0} = \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\frac{ZL}{Z_0 R} + \left(\frac{i}{2} - 1\right)\ln\frac{T_0}{T},$$

где p_0 – давление насыщенного пара вещества при температуре T_0.

Если возвести число e в степени, соответствующие правой и левой частям полученного равенства, и оставить по разные стороны от знака равенства только величины, имеющие одинаковые индексы, то получится соотношение для давления насыщенного пара:

$$p_{нп}T^{\frac{i}{2}-1} \cdot \exp\left(\frac{ZL}{TZ_0 R}\right) = \text{const} = \Upsilon.$$

По-видимому, для давлений насыщенного пара над твердым конденсированным веществом и над жидким величины Υ будут разными.

На рисунке 3 для разных веществ приведены зависимости относительных величин

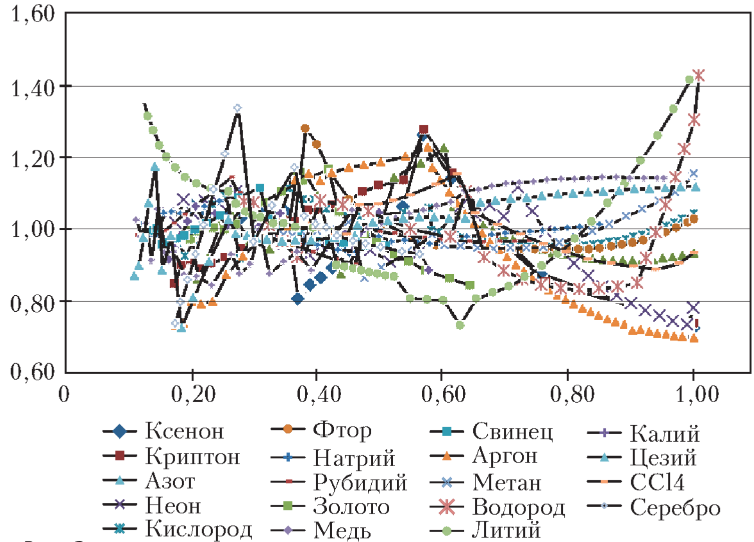


Рис. 3

$\Upsilon/\Upsilon_{ср}$ (по вертикали), которые в соответствии с последней формулой должны быть равны единице, от величины относительной температуры $T/T_{кр}$ (по горизонтали). Данные для вычисления значений Υ взяты из справочника физических величин. Средние значения $\Upsilon_{ср}$ вычислялись отдельно для участков с температурой ниже точки плавления веществ и выше нее.

(Продолжение см. на с. 34)

Природа позаботилась, чтобы деревья не росли до неба.

Немецкая пословица

«Почему яблоко всегда падает отвесно вниз, к земле, а не в сторону или вверх?»

Исаак Ньютон (по легенде)

... гнилушка светилась...даже ярче, чем «вяленая треска»; к тому же она считала себя последним остатком дерева, которое некогда было красой всего леса.

Ханс Кристиан Андерсен

Будем ли мы говорить о питании корня за счет веществ, находящихся в почве, будем ли говорить о воздушном питании листьев за счет атмосферы... – везде для объяснения мы будем прибегать к тем же причинам: диффузия.

Климент Тимирязев

...верхушки корешков...наделены способностью получать сигналы от какого-то чувствительного органа и, подобно мозгу какого-нибудь низшего животного, направлять движение прилегающих частей.

Чарльз Дарвин

...растения способны к обработке информации, только совершенно своеобразными способами и в совершенно ином временнóм темпе.

Стэйси Хармер

А так ли хорошо знакомы вам физика+флора?

Чем только не обязаны мы растительному миру, т.е. флоре: и насыщением воздуха кислородом, и предоставлением на протяжении тысячелетий крова и пищи животному миру. Человечество всегда искало и совершенствовало способы все более интенсивного овладения природой для удовлетворения все более возрастающих насущных нужд. Однако не только – легендарное ньютоновское яблоко стало плодом с древа познания, растительным символом стремления проникнуть в секреты устройства и функционирования окружающего нас мира.

Безусловно, физика – и сама по себе, и в содружестве с другими естественными науками – внесла свой вклад в разгадку тайн природы, кроящихся в обитателях лесов, полей, рек и морей. Ученых вели и любознательность, и все возрастающая тревога за сохранение условий нашего существования, в том числе и флоры.

Возможно, вы найдете отражение этих проблем и в сегодняшней подборке «растительных» сюжетов.

Вопросы и задачи

1. В Юго-Восточной Азии кокосовые орехи попадают с острова на остров, «пройдя» порой десятки километров. Каким образом это им удается?

2. Что позволяет плодам и семенам многих растений преодолевать большие расстояния воздушным путем?

3. Почему все альпийские растения низкорослы?

4. Листья некоторых растений имеют складчатую форму, а лепестки цветов сворачиваются в трубочку. Чем это можно объяснить?

5. Почему в бурю ель вырывается с корнем, а у сосны ломается ствол?

6. Сильный ветер может сломать или вырвать с корнем дерево, но лишь пригибает к земле стебли злаковых, например ржи или овса. Отчего?

7. Стебли подводных растений намного тоньше наземных, однако могут достигать в длину десятки метров. Как они держатся под водой в вертикальном положении?

8. Почему нежелательны всякие ограничения свободной поверхности воды в стоячих водоемах?

9. Какую роль играет восковой налет на поверхности листа и почему стог сена даже при дожде остается сухим?

10. Так что же все-таки препятствует росту деревьев «до неба»?

11. Стоит насекомому присесть на лист растения-хищника, как его створки быстро захлопываются и насекомое становится жертвой хищника. Что способствует быстроте реакции растения?

12. Когда солнце начинает припекать, листья деревьев в верхних ярусах располагаются почти вертикально. Чем это объясняется?

13. Почему перед заморозком рассаду помидоров и огурцов следует обильно поливать?

14. Известно, что в жаркий солнечный день растения не следует поливать – капли воды оставляют на листьях коричневые пятна. Как они возникают?

15. Чем биолюминесценция грибов-гнилушек отличается от свечения животных?

16. Если листья растений наблюдать при свете синей лампы, то зеленые листья кажутся малиново-красными. Почему?

17. Отчего самые глубокие водоросли имеют красный цвет?

Микроопыт

Приложите в жаркий день к щеке лист растения. Что вы почувствуете? Почему?

Любопытно, что...

...еще в XVII веке английский физик и химик Роберт Бойль установил, что свечение гниющей древесины прекращается без воздуха и снова возобновляется в воздушной среде, а именно в присутствии кислорода.

...нидерландский ученый Якоб Вант-Гофф, один из основоположников физической химии и первый Нобелевский лауреат по химии, в 1887 году объяснил природу осмоса, распространив законы идеальных газов на разбавленные растворы, что привело к пониманию механизма питания растений почвенными водами.

...листья Виктории королевской (семейство кувшинковых), растущей у берегов Амазонки, достигают двух метров в поперечнике и пронизаны множеством толстых жилок, благодаря чему настолько крепки, что могут выдержать вес взрослого человека.

...В 1729 году ученый секретарь Парижской академии наук Жан Жак де Мэран сообщил о замечательном наблюдении. Фасоль, опускающая ночью листья, а перед рассветом поднимающая их, продолжала эти циклические движения и в полной темноте. Наличие у растений «внутренних часов» впоследствии было подтверждено множеством опытов и оказалось связанным с внутриклеточными периодическими процессами.

...загадка поворота вслед за солнцем молодых подсолнухов получила разрешение в работе калифорнийских ученых. Утренний свет улавливается фоторецептором растения, передающим сигнал «биологическим часам», который управляет попеременным ростом теневой и нагретой стороны ствола.

...так называемый «бешенный огурец» – растение, при созревании выстреливающее на 6–8 метров струю липкого сока, смешанного с семенами, – накапливает внутри плода газы, давление которых перед «выстрелом» достигает 3 атмосфер!

...стебли бамбука, устремляющиеся ввысь до 35 метров, по своей легкости и прочности не уступают многим строительным материалам. А при использовании современных технологий, придающих ему водостойкость, бамбук может соперничать даже с углеволокном.

...одно из недавних важных открытий отечественных ученых состоялось благодаря сине-зеленым водорослям. Оказалось, что энергия света, захватываемого их фотосинтезирующими молекулами, передается вдоль многоклеточной цепочки за счет электрической связи между клетками.

...за год растения суши и океана манипулируют колоссальными количествами вещества и энергии: они усваивают 150 миллиардов тонн углекислого газа, разлагают 120 миллиардов тонн воды, выделяют 200 миллиардов тонн свободного кислорода и запасают около полутораста триллионов мегаджоулей энергии солнца за счет фотосинтеза.

Что читать в «Кванте» по этой теме

(публикации последних лет)

1. «Электричество из фруктов» – 2010, №6, с.38;

2. «Пылевая буря и ...» – 2012, №5–6, с.60;

3. «Почему хурма вяжет во рту?» – 2013, №2, 4-я с. обл.;

4. «Физик в гостях у биолога» – 2015, Приложение №1;

5. «Ньютон, яблоки и другие» – 2016, №5–6, с.34.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 29)

На диаграммах видны фрагменты плавного изменения величин ϒ и изломы линий на стыках этих фрагментов. Появление таких отличающихся по характеру изменения величин ϒ участков, по-видимому, связано с тем, что в справочник попали данные, полученные разными авторами на разных экспериментальных установках. Если при измерениях имели место ошибки, связанные с неправильной (неточной) калибровкой измерительных приборов, то они были тоже разными.

Как видно, ожидаемое постоянство величин ϒ действительно в какой-то степени выполняется. Все величины группируются вблизи единицы. При этом сами величины давлений насыщенных паров изменяются в очень широком диапазоне.

В таблице 3 для тех же веществ приведены отношения максимального давления насыщенного пара (при самой высокой температуре, для которой есть данные в справочнике) к минимальному давлению (при самой низкой температуре, для которой имеются данные) для каждого из веществ и сами величины максимальных давлений насыщенных паров.

Таблица 3

Вещество	p_{max}	p_{max}/p_{min}
CH_4	4641000	$4{,}6\cdot10^4$
CCl_4	4649000	$4{,}6\cdot10^4$
F_2	5325000	$5{,}3\cdot10^5$
O_2	5087000	$1{,}0\cdot10^{12}$
N_2	3396000	$1{,}7\cdot10^{12}$
Ne	1211000	$2{,}4\cdot10^{12}$
Ar	4860000	$4{,}8\cdot10^{12}$
Kr	5500000	$5{,}5\cdot10^{12}$
Xe	5841000	$5{,}8\cdot10^{12}$
Au	100000	$1\cdot10^{13}$
Cu	100000	$1\cdot10^{13}$
Pb	100000	$1\cdot10^{13}$
Ag	100000	$1\cdot10^{13}$
H_2	1082000	$5{,}4\cdot10^{13}$
Rb	3450000	$3{,}4\cdot10^{14}$
K	13440000	$1{,}1\cdot10^{15}$
Cs	11700000	$1{,}1\cdot10^{15}$
Na	12000000	$1{,}2\cdot10^{15}$
Li	96830000	$9{,}7\cdot10^{15}$

Из найденного ранее соотношения для давления насыщенного пара можно теперь получить для него такое выражение:

$$p_{\text{нп}} = p_0\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{i}{2}-1}\cdot\exp\left(\frac{L}{RT_0}-\frac{L}{RT}\right) = \text{const}\cdot T^{1-\frac{i}{2}}\cdot\exp\left(-\frac{L}{RT}\right).$$

Зависимость давления насыщенного пара от температуры выражается произведением двух функций температуры: степенной и экспоненциальной, причем показатель экспоненты зависит от температуры как $\left(-L/(RT)\right)$, а отрицательный показатель степени температуры $(1-i/2)$ определяется числом атомов, входящих в состав одной молекулы вещества, или количеством i степеней свободы.

При температурах вещества, далеких от критической, и давление насыщенного пара и плотность вещества пропорциональны концентрации молекул:

$$p = nkT,\ \rho = mn\ .$$

Обе эти величины быстро увеличиваются с ростом температуры. В свою очередь, плотность конденсированного вещества при давлении, равном давлению насыщенного пара, убывает с ростом температуры. Убывающая функция и возрастающая функция при некоторой температуре сравниваются по величине, т.е. разница плотностей конденсированного вещества и его насыщенного пара становится все меньше и меньше по мере приближения температуры к критическому значению. При критической температуре эти величины оказываются равными друг другу. Если температура выше критической, то вещество не может самопроизвольно разделиться на области с высокой и низкой плотностью при любом внешнем давлении, т.е. плотность вещества в равновесном состоянии при любом фиксированном давлении и при температуре $T > T_{\text{кр}}$ всюду одинакова.

Связи между микропараметрами и макропараметрами вещества

Исходя из молекулярно-кинетической модели, можно выразить некоторые макропараметры вещества через его микропараметры и наоборот.

Например, в качестве микропараметров можно выбрать такие характеристики: размер (диаметр) D молекулы, масса молекулы m, число Авогадро N_0, глубина потенциальной ямы ZU_0, которую создают для одной молекулы ее ближайшие соседи. Последний из параметров состоит из двух величин, но они в формулы для макропараметров так и будут входить в виде произведения. Тогда оценки для макропараметров, выраженные через микропараметры, будут такими:

- плотность вещества $\rho \approx 1{,}41\dfrac{m}{D^3}$,
- молярная масса $\mathrm{M} = mN_0$,
- теплота испарения вещества при нулевой температуре

$$L = \frac{Z_0U_0N_0}{2} = L_{\text{пл}} + Q_{\text{пар}} + RT_{\text{кип}}\left(\frac{i}{2} - 1\right),$$

- коэффициент поверхностного натяжения при низкой температуре

$$\sigma \approx \frac{Z_0U_0}{2\sqrt{3}D^2}.$$

Четыре микропараметра могут быть выражены через четыре макропараметра:

$$D = 2{,}45\frac{\mathrm{M}\sigma}{\rho L},\quad N_0 = \left(\frac{L}{\sigma}\right)^3\frac{(\rho/\mathrm{M})^2}{6\sqrt{3}},$$

$$m = \frac{\mathrm{M}}{N_0},\quad Z_0U_0 = \frac{2L}{N_0}.$$

Заметим, число Авогадро N_0 и порядок величины D знакомы всем с момента начала изучения молекулярной физики в школе.

В таблице 4 для разных веществ приведены отношения вычисленного нами числа Авогадро N_0 к настоящему числу Авогадро $N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$ 1/моль. Вычисления проводились по макроскопическим параметрам, взятым из справочника физических величин. Видно, что соответствия нет, но для грубой оценки числа Авогадро без проведения специальных экспериментов и этот результат подходит.

Таблица 4

Вещество	N_0/N_A	Вещество	N_0/N_A
Ne	0,50	O_2	3,13
Kr	0,57	C_6H_6	5,18
Ba	0,63	Au	8,29
He	1,08	O=C=Me_2	9,68
H_2	1,53	Ag	10,14
Xe	2,31	Mo	13,01
Cd	2,37	Na	14,57
CH_4	2,51	W	16,87
Rn	2,57	Cu	17,20
N_2	2,61	Li	21,16
Ar	2,63	Al	22,24

Таблица 5

Вещество	D	Вещество	D
Cu	0,91	Ar	2,46
Al	0,94	N_2	2,62
W	1,04	He	2,70
Li	1,10	C_6H_6	2,74
Mo	1,12	CH_4	2,80
Ag	1,24	Xe	2,96
Au	1,32	Rn	3,12
Na	1,52	H_2	3,28
O_2	2,15	Ne	3,59
Cd	2,22	Kr	4,47
O=C=Me_2	2,31	Ba	4,96

Отличие N_0 от N_A в 10–20 раз для крупных молекул органических веществ и большинства металлов подсказывает, что для них модель парного взаимодействия молекул не очень-то подходит.

В таблице 5 приведены оценочные размеры молекул в ангстремах (10^{-10} м). Все значения по порядку величины одинаковы и соответствуют ожидаемым нескольким ангстремам.

Расстояния на сфере

С.КУЗНЕЦОВ

«Доброе утро, говорит командир воздушного судна. Наш самолет сегодня выполняет рейс №100 по маршруту Москва – Нью-Йорк...» Заглянем в справочник: широта Москвы $55°45'$, Нью-Йорка $40°43'$. Казалось бы, нужно лететь на юго-запад – однако самолет уверенно забирает к северу: под крылом Санкт-Петербург, Балтийское море, Скандинавия...

Разгадка проста: Земля не плоская, и линия, проведенная по линейке на карте (*локсодромия*), не будет самой короткой на глобусе. Рассмотрим, например, две точки на широте 45°, между которыми 180° долготы. Если лететь по 45-й параллели (прямая линия по карте), придется преодолеть расстояние $\pi r = \pi \frac{\sqrt{2}}{2} R_\oplus$, где r – радиус параллели, $R_\oplus$ – радиус Земли. Если же лететь через полюс, то мы пролетим четверть круга радиуса $R_\oplus$, т.е. $\frac{1}{2}\pi R_\oplus$ – почти в полтора раза меньше ($\sqrt{2} \approx 1,41$). Недаром знаменитый советский летчик Валерий Чкалов избрал именно этот опасный полярный маршрут (рис.1) для перелета из Москвы ($55°45'$ с.ш., $37°37'$ в.д.) в американский Ванкувер ($45°38'$ с.ш., $122°36'$ з.д.).

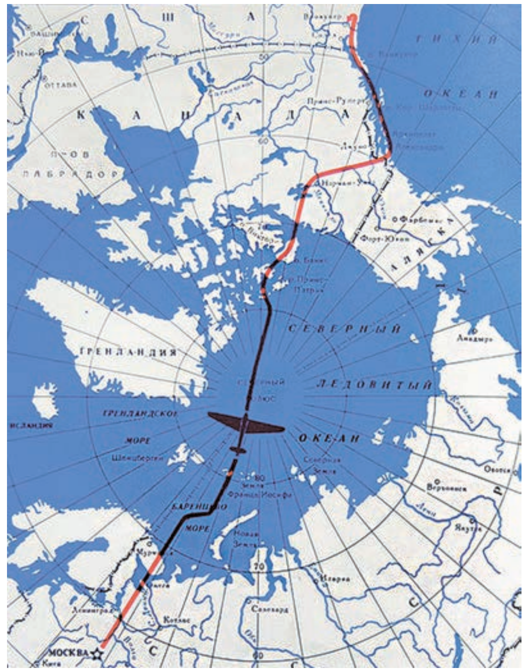


Рис. 1

Самый короткий путь на сфере – это дуга *большого круга*, т.е. окружности, которая получается при сечении сферы плоскостью, проходящей через центр. Всякий меридиан есть дуга (точнее, половина) большого круга, а вот среди параллелей такой чести удостоился лишь экватор.

А как вычислить расстояние по этой кратчайшей линии, если известны географические координаты двух пунктов P и Q? Пусть между ними β градусов долготы, а широты их равны α_1 и α_2 (обе точки в северном полушарии). Проведем через эти точки меридианы, они пересекутся в полюсах N и S (рис.2). Треугольник NPQ составлен из дуг больших кругов; их длины удобно измерять *угловой мерой*: 1 градус составляет 1/360 от полного круга. Перейти от угловой меры к километрам очень просто: дуга в γ градусов имеет длину $\frac{\gamma}{360°} \cdot 2\pi R_\oplus$.

В угловой мере стороны NP и NQ равны α_1 и α_2; угол при вершине N равен β. Нужно найти сторону PQ. На плоскости мы бы воспользовались теоремой косинусов. Есть ли такая теорема на сфере?

Вспомним, откуда берется плоская теорема косинусов. Посмотрим на рисунок 3 и

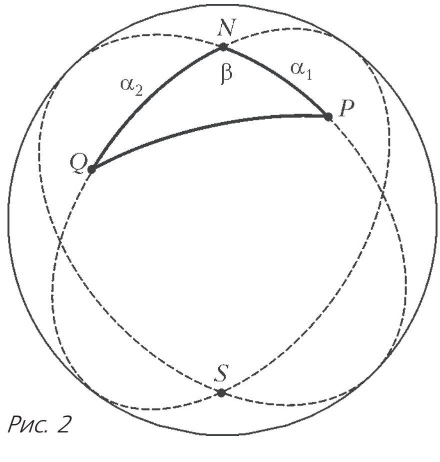


Рис. 2

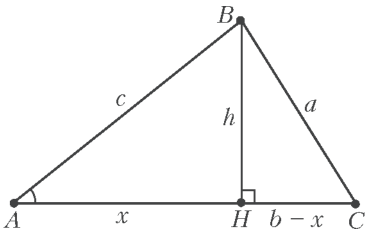


Рис. 3

применим дважды теорему Пифагора:

$$\begin{cases} a^2 = h^2 + (b-x)^2, \\ c^2 = h^2 + x^2, \end{cases}$$

откуда следует $a^2 - c^2 = b^2 - 2bx$. Поскольку $x = c\cos\angle A$, получаем

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A.$$

Итак, нам нужны два ингредиента: аналог теоремы Пифагора и аналог соотношения, выражающего косинус, для прямоугольного треугольника на сфере.

Пусть в ΔABC на сфере угол C прямой, а $\angle A = \alpha$; угловые меры катетов BC и AC и гипотенузы AB равны a, b и c соответственно. Повернем сферу так, чтобы точка A оказалась Южным полюсом. Для простоты считаем, что точки B и C тоже находятся южнее экватора. Совершим центральную проекцию[1] (рис.4) – точки B и C перейдут в B_1 и C_1. Пирамида OAB_1C_1 изобилует прямыми углами:

$$\angle AC_1B_1 = \angle OC_1B_1 = \angle OAC_1 = \angle OAB_1 = 90^\circ$$

(докажите это!). В частности, сохранился прямой угол при вершине C. Значит, $\cos\angle A = AC_1/AB_1$ (сам угол при вершине A и на сфере, и на касательной плоскости имеет ту же величину). Поскольку $AC_1 = OA\operatorname{tg} b$ и $AB_1 = OA\operatorname{tg} a$, получаем $\cos\angle A = \operatorname{tg} b/\operatorname{tg} a$: на сфере, чтобы узнать косинус угла, надо делить не катет на гипотенузу, а тангенс катета на тангенс гипотенузы. Легко получить и соотношение на катеты и гипотенузу, заменяющее здесь теорему Пифагора:

$$OB_1\cos c = OA = OC_1\cos b = OB_1\cos a\cos b,$$

откуда

$$\cos a\cos b = \cos c.$$

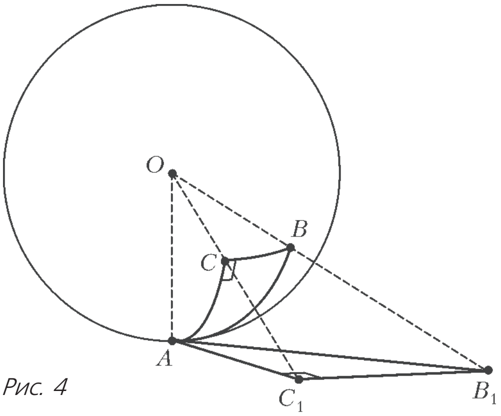


Рис. 4

[1] Заметим, что эта же проекция использовалась на карте на рисунке 1.

Теперь мы готовы вывести сферическую теорему косинусов. Посмотрим еще раз на рисунок 3 и вообразим, что дело происходит на сфере:

$$\begin{cases} \cos a = \cos h\cos(b-x), \\ \cos c = \cos h\cos x. \end{cases}$$

Если $\cos x \neq 0$, можно избавиться от $\cos h$; вместо формулы квадрата разности нам теперь пригодится формула косинуса разности:

$$\cos a = \frac{\cos c}{\cos x}(\cos b\cos x + \sin b\sin x) =$$
$$= \cos b\cos c + \sin b\cos c\operatorname{tg} x.$$

Наконец, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} c\cos\angle A$, откуда

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\angle A.$$

Эта формула не очень похожа на плоскую теорему косинусов[2], однако ее работу успешно выполняет. Вернемся к ΔNPQ: в нем $\cos PQ = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\beta$. Для Москвы и Нью-Йорка $\alpha_1 \approx 35^\circ$, $\alpha_2 \approx 50^\circ$, $\beta \approx 111^\circ$, откуда $\cos PQ \approx 0,37$, угловая мера дуги PQ примерно равна $68,28^\circ$, а расстояние между городами равно примерно 7600 км.

Наш результат не вполне точен, потому что поверхность Земли не совсем сферическая. Вращение вокруг оси сжимает планету к плоскости экватора; влияет на ее форму и

[2] На самом деле, плоская теорема косинусов получается как предельный случай сферической: если угловая мера дуги x мала, то $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, и после подстановки и отбрасывания малых слагаемых получается как раз обычная теорема косинусов (а из соотношения $\cos c = \cos a\cos b$ в прямоугольном треугольнике получается теорема Пифагора).

неравномерное распределение суши и океанов. Современная наука говорит, что Земля имеет форму *геоида* (переводя с греческого: форму тела, похожего на Землю). При нашем вычислении погрешность составила около 100 км, т.е. меньше 1,5%.

Упражнения

1. Вычислите расстояние по дуге большого круга между Берлином (52°31′ с.ш., 13°23′ в.д.) и Сиднеем (33°52′ ю.ш., 151°12′ з.д.).

2. В доказательстве сферической теоремы косинусов мы опустили многие случаи: когда высота попадает на продолжение стороны; когда $\cos x = 0$; когда вершины прямоугольного треугольника оказываются в разных полушариях. Восстановите рассуждения для этих случаев.

3. Докажите, что в прямоугольном треугольнике на сфере $\sin\angle A = \dfrac{\sin a}{\sin c}$. Выведите отсюда сферический аналог теоремы синусов.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Задачи

Мы завершаем очередной этап конкурса по решению математических задач. Конкурс возобновится в следующем учебном году. Задания появятся в сентябре и будут опубликованы в «Кванте» №9.

Задачи рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов.

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Желаем успеха!

24. В волшебном дворце обитают прекрасные феи. Каждый день у всех фей, кроме одной, улучшается и обаятельность, и привлекательность, а у оставшейся феи – только одно из этих качеств (а другое может и ухудшиться). Однако за последний год все феи совершенно не изменились. Каково наибольшее возможное число фей во дворце? (В году 365 дней.)

А.Канель-Белов

25. Из круга можно вырезать четырехугольник, у которого две противоположные стороны равны a и c, а две другие – b и d. Толик Втулкин утверждает, что тогда из этого круга можно вырезать и четырехугольник, у которого две противоположные стороны равны a и b, а две другие – c и d. Прав ли Толик? Решите задачу в случаях, когда исходный четырехугольник: а) вписан в данный круг (вершины четырехугольника лежат на границе круга); б) не обязательно вписан, но выпуклый (диагонали лежат внутри четырехугольника); в) может быть невыпуклым (одна из диагоналей может лежать снаружи четырехугольника).

С.Дворянинов

26. Ладья должна пройти из левого нижнего угла шахматной доски в правый верхний ровно за 6 ходов. При этом она может сдвигаться только вправо или вверх, а ходы вверх и вправо должны чередоваться. Найдите количество возможных маршрутов ладьи.

П.Кожевников

27. Докажите, что для всех натуральных n число $\frac{1}{3}\left(4^{4n+1}+4^{3n+1}+1\right)$ является составным.

В.Расторгуев

Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».

Футбольные и волейбольные турниры

А.ЗАСЛАВСКИЙ

Сила мысли на исходе,
Рассуждать о новой моде,
О футболе, о погоде
И о прочих пустяках –
Только это и осталось...

А.Великий

Известно много математических задач, в которых речь идет о спортивных соревнованиях. Чаще всего в них говорится об однокруговых турнирах, в которых каждый из n участников один раз играет с каждым из остальных. При этом, как правило, предполагается, что очки начисляются по шахматной системе, т.е. за победу участник получает одно очко, за ничью – пол-очка, за поражение – ноль очков (в командных видах спорта за победу раньше давали два очка, а за ничью одно, что, с математической точки зрения, принципиально не отличается от шахматной системы). О шахматных турнирах «Квант» рассказывал неоднократно[1], поэтому здесь мы отметим только два следующих свойства таких турниров.

1. Сумма очков, набранных всеми участниками, равна $n(n-1)/2$.

Действительно, в каждой партии ее участники при любом исходе набирают в сумме одно очко, а общее число партий в турнире равно $n(n-1)/2$.

2. Если участник набрал в итоге s очков, то разность между числом его побед и числом его поражений равна $2s-n+1$.

Действительно, если участник выиграл w партий, а проиграл l партий, то вничью он сыграл $n-1-w-l$ раз, т.е. набрал $s=w+(n-1-w-l)/2=(n-1)/2+(w-l)/2$ очков, что равносильно свойству 2.

Из свойств 1 и 2 легко вывести утверждения, сформулированные в следующих упражнениях.

Упражнения

1. Докажите, что если все участники турнира набрали поровну очков, то у каждого из них число побед равно числу поражений.

2. Докажите, что если не все участники турнира набрали поровну очков, то у победителя турнира побед больше, чем поражений, а у участника, занявшего последнее место, побед меньше, чем поражений.

В конце прошлого века в футбольных турнирах за победу стали давать три очка, а за ничью одно. В последние годы в волейболе ввели систему, при которой, если встреча заканчивается со счетом 3:0 или 3:1, то победившая команда получает три очка, а проигравшая – ноль очков; если встреча заканчивается со счетом 3:2, то команды получают два и одно очко соответственно. Очевидно, что при футбольной системе оба свойства 1 и 2 перестают выполняться, а при волейбольной сохраняется только свойство 1. Поэтому можно ожидать, что и утверждения упражнений 1 и 2 перестают быть верными. Соответствующие контрпримеры несложно придумать, если число участников турнира достаточно велико. Однако вопрос о минимально возможном числе участников таких турниров не столь прост и достаточно интересен. Такого рода задачи мы и будем рассматривать в этой статье.

Задача 1. *В футбольном турнире все n команд-участниц набрали поровну очков. При каком наименьшем n может оказаться, что не у всех команд число побед равно числу поражений?*

Ответ. $n=8$.

Решение. Если не у всех команд побед и поражений поровну, то найдется команда, имеющая больше побед, чем поражений, и команда, имеющая больше поражений, чем побед. Предположим сначала, что у обеих команд количества побед и поражений отличаются на 1, т.е. у первой команды x побед и $x-1$ поражений, а у второй y побед и $y+1$ поражений. Тогда из условия равенства

[1] См., например, статью А.Заславского «О логичных и нелогичных турнирах» («Квант» №5 за 1997 г.) или статью А.Заславского и Б.Френкина «Математика турниров» («Квант» №1, 2 за 2007 г.).

очков получаем

$$3x+n-1-x-(x-1)=3y+n-1-y-(y+1),$$

т.е. $y=x+2$. Поскольку $x\ge 1$, получаем, что $n-1\ge 2y+1\ge 7$, т.е число команд не меньше 8. Если же у какой-то команды количества побед и поражений отличаются больше чем на 1, то аналогичными рассуждениями получаем для n более сильную оценку.

Пример искомого турнира восьми команд дает таблица 1.

Таблица 1

–	1	1	1	1	1	1	3	9
1	–	3	0	1	1	0	3	9
1	0	–	3	1	0	1	3	9
1	3	0	–	0	1	1	3	9
1	1	1	3	–	3	0	0	9
1	1	3	1	0	–	3	0	9
1	3	1	1	3	0	–	0	9
0	0	0	0	3	3	3	–	9

Приведенное решение формально является полным: доказана оценка для n и приведен соответствующий пример. Однако оно оставляет чувство неудовлетворенности: непонятно, как такой пример придумать. Поэтому приведем некоторые пояснения, которые могут оказаться полезными и в последующих задачах.

При доказательстве оценки мы выяснили, что среди восьми команд некоторые имеют одну победу и шесть ничьих, другие – три победы и четыре поражения, а у остальных побед и поражений поровну. Поскольку у команд первой и второй групп по 9 очков, получаем, что команды третьей группы выиграли и проиграли по две игры. Кроме того, так как суммарное количество побед у всех команд должно равняться суммарному количеству поражений, две первых группы состоят из одинакового количества команд, обозначим его через k. Тогда каждая команда первой группы проводит k встреч против команд второй группы и эти встречи не могут закончиться вничью, поскольку у команд второй группы ничьих нет. Но команды первой группы играют вничью все встречи, кроме одной, что возможно только при $k=1$.

Итак, у нас есть одна команда, назовем ее A, выигравшая один матч и сыгравшая вничью остальные, и одна команда B, выигравшая три матча и проигравшая четыре. Очевидно, что A выиграла у B, а остальные шесть команд делятся на две тройки: выигравших у B и проигравших ей. Теперь если каждая команда из первой тройки проиграет одной команде из второй (каждая своей), то в остальных играх каждая из шести команд должна будет выиграть и проиграть по одному матчу. Построение соответствующего примера не составляет сложности.

Заметим, что тем самым мы доказали, что при $n=8$ не менее шести команд имеют поровну побед и поражений. Аналогичными рассуждениями можно показать, что при $n=9$ таких команд не менее пяти, при $n=10$ – не менее четырех и т.д. Таким образом, при $n<14$ такие команды обязательно найдутся.

Упражнение 3. Приведите пример турнира 14 команд, в котором у всех поровну очков, но нет команд, имеющих поровну побед и поражений.

Задача 2. *В волейбольном турнире все n команд-участниц набрали поровну очков. При каком наименьшем n может оказаться, что не у всех команд число побед равно числу поражений?*

Ответ. $n=5$.

Решение. Прежде всего отметим, что все команды могут набрать поровну очков только при нечетном n. Действительно, поскольку в каждой игре участвующие в ней команды набирают в сумме 3 очка, сумма очков, набранных всеми командами, равна $3n(n-1)/2$, что при четном n на n не делится.

При $n=3$ каждая из трех команд набирает в двух матчах три очка, что возможно только при одной победе и одном поражении. При $n=5$ возможна следующая таблица 2.

Таблица 2

–	2	2	2	0	6
1	–	3	0	2	6
1	0	–	3	2	6
1	3	0	–	2	6
3	1	1	1	–	6

Задача 3. *В волейбольном турнире все n команд-участниц набрали поровну очков. При каком наименьшем n может оказаться, что ни у одной из команд число побед не равно числу поражений?*

Ответ. $n=9$.

Решение. Так как n нечетно (см. предыдущую задачу), разность между числом побед и числом поражений у каждой команды четна. При этом хотя бы у одной команды эти числа должны отличаться больше чем на 2, поскольку в противном случае общее количество побед не будет равно общему числу поражений. Будем считать, что есть команда, имеющая побед, по крайней мере, на 4 больше, чем поражений (противоположный случай рассматривается аналогично). Если эта команда проиграла только одну игру, то она набрала не меньше $2(n-2)$ очков, причем $n \geq 7$. Но, с другой стороны, у нее должно быть $3(n-1)/2$ очков, а при таких значениях n получается $2(n-2) > 3(n-1)/2$ – противоречие. Следовательно, эта команда проиграла не меньше двух встреч, а выиграла не меньше шести, т.е. $n \geq 9$.

Пример турнира девяти команд дает таблица 3.

Таблица 3

–	0	0	2	2	2	2	2	2	12
3	–	2	1	2	2	2	0	0	12
3	1	–	2	0	0	2	2	2	12
1	2	1	–	2	2	0	2	2	12
1	1	3	1	–	3	3	0	0	12
1	1	3	1	0	–	3	3	0	12
1	1	1	3	0	0	–	3	3	12
1	3	1	1	3	0	0	–	3	12
1	3	1	1	3	3	0	0	–	12

Задача 4. *В футбольном турнире n команд команда «Хитрецы» набрала больше очков, чем любая другая, а команда «Простаки» – меньше, чем любая другая. При этом «Хитрецы» выиграли меньше матчей, чем проиграли, а у «Простаков» побед оказалось больше, чем поражений. При каком наименьшем n возможна такая ситуация?*

Ответ. $N = 12$.

Решение. Из условия следует, что «Хитрецы» обогнали «Простаков» хотя бы на два очка. Рассуждая так же, как в задаче 1, получаем, что для этого «Хитрецы» должны выиграть не меньше пяти матчей, следовательно, $n \geq 12$. При $n = 12$ такой турнир существует (табл.4).

Таблица 4

–	3	3	3	3	3	0	0	0	0	0	0	15
0	–	3	3	0	0	1	1	1	1	3	1	14
0	0	–	3	3	0	1	1	1	3	1	1	14
0	0	0	–	3	3	1	1	3	1	1	1	14
0	3	0	0	–	3	1	3	1	1	1	1	14
0	3	3	0	0	–	3	1	1	1	1	1	14
3	1	1	1	1	0	–	3	3	0	0	1	14
3	1	1	1	0	1	0	–	3	3	0	1	14
3	1	1	0	1	1	0	0	–	3	3	1	14
3	1	0	1	1	1	3	0	0	–	3	1	14
3	0	1	1	1	1	3	3	0	0	–	1	14
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	–	13

Задача 5. *В волейбольном турнире n команд команда «Хитрецы» набрала больше очков, чем любая другая, а команда «Простаки» – меньше, чем любая другая. При этом «Хитрецы» выиграли меньше матчей, чем проиграли, а у «Простаков» побед оказалось больше, чем поражений. При каком наименьшем n возможна такая ситуация?*

Ответ. $n = 6$.

Решение. При $n < 6$ «Хитрецы» выигрывают не больше одной встречи и, следовательно, набирают не больше $3 + (n-2) = n+1$ очков. Аналогично, «Простаки» набирают не меньше $2(n-2)$ очков. Так как у «Хитрецов» должно быть хотя бы на два очка больше, чем у «Простаков», получаем, что $n \leq 3$. Но при трех командах описанная ситуация, очевидно, невозможна.

Пример для шести команд приведен в таблице 5.

Таблица 5

–	1	1	1	3	3	9
2	–	1	1	1	3	8
2	2	–	2	1	1	8
2	2	1	–	1	1	7
0	2	2	2	–	1	7
0	0	2	2	2	–	6

В заключение заметим, что еще более парадоксальные ситуации могут возникнуть, если команды играют не один, а несколько кругов. Например, может оказаться, что во встречах любых двух команд больше побед одерживает команда, набирающая в итоге меньше очков. Попробуйте придумать примеры подобных турниров, желательно, с небольшим числом кругов и команд. Возможно, при этом получатся новые интересные задачи.

Наполеон-водолаз и Фейнман-экспериментатор

А.ПАНОВ

Этот материал – небольшое дополнение к недавно опубликованной статье «Спасем водолаза» (см. «Квант» №2 за 2016 г.).

Напомним, что картезианский водолаз был впервые описан Рафаэлло Маджотти в 1648 году в его трактате о несжимаемости воды. В современной версии картезианский водолаз представляет собой стеклянный флакончик, частично заполненный водой, частично воздухом и плавающий вниз горлышком в герметично закрытой пластиковой бутылке. Если сжать бутылку, водолаз опускается на дно, а если бутылку отпустить – он поднимается.

Маджотти использовал водолаза для исследования сжимаемости воздуха и воды, но в скором времени водолаз из физического инструмента превратился в популярную игрушку. Он даже стал «оружием» для политической сатиры. Вот – потешная картинка 1813 года, она изображена на рисунке 1. Подпись к картинке примерно такая: «Это Наполеон прикинулся картезианским дьяволом. Австриец притопил его, а русский смеется – Эй, Эй, Приятель! Это ты правильно сделал, что в бутылку залез». (На рисунке стеклянная бутыль герметично закрыта упругой пленкой.)

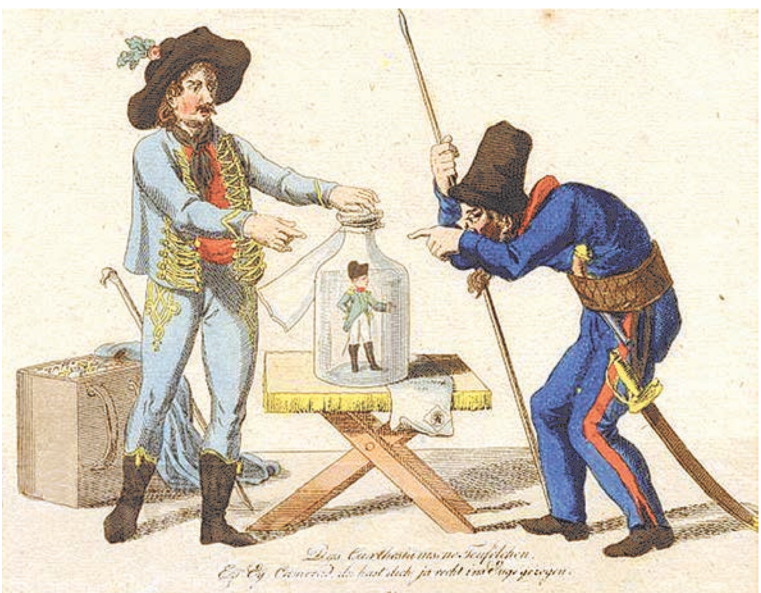


Рис. 1. Наполеон-водолаз

«Картезианский дьявол» – это другое название картезианского водолаза, может по созвучию diver – devil (водолаз – дьявол). Впрочем, стеклодувы уже давно выдували его в виде забавного чертика (рис.2). Посмотрите – у чертика закрученный хвостик с отверстием на конце. За счет этого чертик не только скачет вверх-вниз, но еще и крутится вокруг своей оси, словно настоящий танцор. Именно так его и называют французы – ludion. При сжатии бутылки порция воды за счет избыточного давления затекает внутрь чертика, а когда бутылку отпускают, вода вытекает из него через отверстие в хвосте и закручивает чертика.

Как раз так и устроено сегнерово колесо – небольшая водяная турбина, часто используемая для поливки газонов (рис.3). Вода под давлением подается в S-образную трубку, вытекает из нее и заставляет трубку вращаться с большой скоростью.

Книга Ричарда Фейнмана «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!» – это собрание рассказанных им историй. Она позволяет узнать, как маленький мальчик-экспериментатор превратился в великого физика-теоретика.

Одна из этих историй – как раз о вращающемся разбрызгивателе. Когда осенью 1939 года Фейнман перебрался из Массачусетса в Принстон, он первым

Рис. 2. Картезианский черт с хвостом

делом отыскал принстонский циклотрон и был очарован им:

«... Провода в этой комнате были натянуты повсюду. Переключатели свисали с проводов, охлаждающая вода капала из вентилей, комната была полна всякой всячины, все выставлено, все открыто. Везде громоздились столы со сваленными в кучу инструментами. Словом, это была наиболее чудовищная мешанина, которую я когда-либо видел. Весь циклотрон помещался в одной комнате, и там был полный, абсолютный хаос! Это напомнило мне мою детскую домашнюю лабораторию».

Дальше Фейнман рассказывает об эксперименте, поставленном им в циклотронной лаборатории. В то время Принстон поразила вирусная задача. Все физики знали, что вода, вытекающая из S-образной трубки, заставляет ее вращаться. Но вот насчет того, что произойдет с такой трубкой, полностью погруженной в воду, если через нее начать отсасывать воду, шли большие споры. Будет ли трубка вращаться в ту или другую сторону? Тут были разные мнения, в том числе и у самого Фейнмана. Когда Фейнман, наконец, путем размышлений пришел к окончательному ответу, он взялся за экспериментальное подтверждение. В лаборатории стояла бутыль гигантских размеров. Через пробку Фейнман провел в нее два шланга. Один – для закачки сжатого воздуха, другой – для вывода наружу воды, поступающей в трубку. Чтобы получить более точные результаты, Фейнман несколько раз увеличивал давление входящего воздуха – в результате все взорвалось. Осколки стекла и струи воды разлетелись во все стороны, множество снимков треков частиц, полученных на циклотроне, пострадали. А сам Фейнман был навсегда изгнан из циклотронной лаборатории.

Рис. 3. Самоходный поливальщик. Интересно, в какую сторону крутится изогнутая трубка?

Между тем, для проверки своих теоретических выводов Фейнман вполне мог бы обойтись и безобидным декартовым чертиком. В первой из приведенных ниже ссылок как раз говорится о том, как самому сделать водолаза-танцора. Изготовьте его и посмотрите, будет ли он закручиваться под действием затекающей в него воды.

Ссылки

• http://www.reinventore.it/reinventore-tv/le-caraffine-di-magiotti-2

Замечательное видео Бениамино Данесе (Beniamino Danese) о картезианском водолазе, оно называется «Флакончики Маджотти». Ближе к концу рассказывается, как из пластмассовой трубочки можно сделать водолаза-танцора. Заодно послушаете, как красиво звучит итальянская речь.

• http://www.reinventore.it/sala-professori/2013/12/le-caraffine-di-magiotti

Текст, в котором рассказано о самом Рафаэлло Маджотти, о декартовом водолазе и еще об одной истории, связанной с экспериментом Фейнмана.

• http://www.reinventore.it/reinventore-tv

Это отличное собрание видео с разными физическими экспериментами.

• http://web-ter.unizar.es/cienciate/expo/en/index.html

Коллекция под названием «Dance, dance, you little devils», содержащая 77 старинных изображений декартова водолаза. Рисунок 1 в статье взят оттуда.

• Книга Ричарда Фейнмана «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!»

(Продолжение см. на с. 51)

XXXVIII Турнир городов

Задачи весеннего тура

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1. (3)[1] Найдите наименьшее натуральное число, которое начинается (в десятичной записи) на 2016 и делится на 2017.

М.Евдокимов

2. (4) Докажите, что на графике любого квадратного трехчлена со старшим коэффициентом 1, имеющего ровно один корень, найдется такая точка (p, q), что трехчлен $x^2 + px + q$ также имеет ровно один корень.

Б.Френкин

3. (5) Из вершины A остроугольного треугольника ABC по биссектрисе угла A выпустили бильярдный шарик, который отразился от стороны BC по закону «угол падения равен углу отражения» и дальше катился по прямой, уже ни от чего не отражаясь. Докажите, что если $\angle A = 60°$, то траектория шарика проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

А.Кузнецов

4. (5) В ряд стоят 100 детей разного роста. Разрешается выбрать любых 50 детей, стоящих подряд, и переставить их между собой как угодно (остальные остаются на своих местах). Как всего за 6 таких перестановок гарантированно построить всех детей по убыванию роста слева направо?

И.Богданов

5. а) (2) См. задачу М2458,а «Задачника «Кванта».

б) (3) См. задачу М2458,б «Задачника «Кванта».

10–11 классы

1. (3) Дан правильный 12-угольник $A_1A_2\ldots A_{12}$. Можно ли из 12 векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, …, $\overrightarrow{A_{11}A_{12}}$, $\overrightarrow{A_{12}A_1}$ выбрать 7, сумма которых равна нулевому вектору?

М.Мурашкин

2. (4) Даны две концентрические окружности и точка A внутри меньшей окружности. Угол величиной α с вершиной в A высекает на этих окружностях по дуге. Докажите, что если дуга большей окружности имеет угловой размер α, то и дуга меньшей окружности имеет угловой размер α.

Е.Бакаев

3. (5) В каждую клетку квадрата 1000×1000 вписано число так, что в любом не выходящем за пределы квадрата прямоугольнике площади s со сторонами, проходящими по границам клеток, сумма чисел одна и та же. При каких s числа во всех клетках обязательно будут одинаковы?

Е.Бакаев

4. (5) По кругу стоят 10 детей разного роста. Время от времени один из них перебегает на другое место (между какими-то двумя детьми). Дети хотят как можно скорее встать по росту в порядке возрастания по часовой стрелке (от самого низкого к самому высокому). Какого наименьшего количества таких перебежек им заведомо хватит, как бы они ни стояли изначально?

Е.Бакаев

5. (6) Графики двух квадратных трехчленов пересекаются в двух точках. В обеих точках касательные к графикам перпендикулярны. Верно ли, что оси симметрии графиков совпадают?

А.Заславский

СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

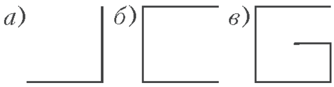
1. (5) В шахматном турнире было 10 участников. В каждом туре участники разбивались на пары и в каждой паре играли друг с другом одну игру. В итоге каждый участник сыграл с каждым ровно один раз, причем не меньше чем в половине всех игр участники были земляками (из одного горо-

[1] В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за ее полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов.

да). Докажите, что в каждом туре хотя бы одна игра была между земляками.

Б.Френкин

2. а) (1) Можно ли нарисовать на клетчатой бумаге многоугольник и поделить его на две равные части разрезом такой формы, как показано на рисунке *а*?



б) (2) Решите ту же задачу для разреза такой формы, как на рисунке *б*.

в) (4) Решите ту же задачу для разреза такой формы, как на рисунке *в*.

(Во всех пунктах разрез лежит внутри многоугольника, на границу выходят только концы разреза. Стороны многоугольника и звенья разреза идут по линиям сетки, маленькие звенья в два раза короче больших.)

Ю.Маркелов, ученик 7 класса

3. Взяли несколько положительных чисел и построили по ним такую последовательность: a_1 – сумма исходных чисел, a_2 – сумма квадратов исходных чисел, a_3 – сумма кубов исходных чисел и т.д.

а) (4) Могло ли случиться, что до a_5 эта последовательность убывает ($a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$), а начиная с a_5 – возрастает ($a_5 < a_6 < a_7 < \ldots$)?

б) (4) А могло ли случиться, наоборот: до a_5 последовательность возрастает, а начиная с a_5 – убывает?

А.Толпыго

4. (8) В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все стороны равны, а также $AD = BE = CF$. Докажите, что в этот шестиугольник можно вписать окружность.

Б.Обухов

5. (8) Масса каждой гирьки набора – нецелое число граммов. Ими можно уравновесить любую целую массу от 1 г до 40 г (гирьки кладутся на одну чашку весов, измеряемая масса – на другую). Каково наименьшее число гирек в таком наборе?

А.Шаповалов

6. (10) См. задачу М2460 «Задачника «Кванта».

7. а) (6) См. задачу М2461,а «Задачника «Кванта».

б) (3) См. задачу М2461,б «Задачника «Кванта».

в) (3) См. задачу М2461,в «Задачника «Кванта».

М.Евдокимов

10–11 классы

1. (4) На плоскости даны треугольник и 10 прямых. Оказалось, что каждая прямая равноудалена от каких-то двух вершин треугольника. Докажите, что или две из этих прямых параллельны, или три из них пересекаются в одной точке.

С.Маркелов

2. а) (3) См. задачу 3,а для 8–9 классов.

б) (3) См. задачу 3,б для 8–9 классов.

3. (7) Вася утверждает, что он разрезал выпуклый многогранник, у которого есть лишь треугольные и шестиугольные грани, на две части и склеил из этих частей куб. Могут ли слова Васи быть правдой?

М.Евдокимов

4. (8) Петя раскрасил каждую клетку квадрата 1000×1000 в один из 10 цветов. Также он придумал такой 10-клеточный многоугольник Ф, что при любом способе положить его по границам клеток на раскрашенный квадрат все 10 накрытых им клеток будут разного цвета. Обязательно ли Ф – прямоугольник?

Е.Бакаев

5. (9) В треугольнике ABC с углом A, равным $45°$, проведена медиана AM. Прямая b симметрична прямой AM относительно высоты BB_1, а прямая c симметрична прямой AM относительно высоты CC_1. Прямые b и c пересеклись в точке X. Докажите, что $AX = BC$.

Е.Бакаев

6. (10) При каких натуральных n для всякого целого $k \geq n$ найдется число с суммой цифр k, кратное n?

А.Кузнецов, И.Лосев

7. (12) В Чикаго живут 36 гангстеров, некоторые из которых враждуют между собой. Каждый гангстер состоит в нескольких бандах, причем нет двух банд с совпадающим составом. Оказалось, что гангстеры, состоящие в одной банде, не враждуют, но если гангстер не состоит в какой-то банде, то он враждует хотя бы с одним ее участником. Какое наибольшее число банд могло быть в Чикаго?

Фольклор (предложил Л.Шабанов)

Устный тур для 11 класса

1. В первый день 2^n школьников играли в пинг-понг навылет: сначала сыграли двое, затем победитель сыграл с третьим, победитель этой пары – с четвертым и т.д., пока не сыграл последний школьник (ничьих в пинг-понге не бывает). Во второй день те же школьники разыграли кубок: сначала произвольно разбились на пары и сыграли в парах, проигравшие выбыли, а победители снова произвольно разбились на пары и сыграли в парах и т.д. Оказалось, что наборы игравших пар в первый и во второй день были одни и те же (возможно, победители были другие). Найдите наибольшее возможное значение n.

Б.Френкин

2. Сфера касается 99 ребер некоторой выпуклой 50-угольной пирамиды. Обязательно ли тогда она касается и 100-го ребра этой пирамиды?

М.Евдокимов

3. См. задачу М2459 «Задачника «Кванта».

4. Клетки доски 100×100 раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Можно ли перекрасить ровно 2018 различных клеток этой доски в противоположный цвет так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось одно и то же количество черных клеток?

Ю.Чеканов

5. Дан треугольник XBC. Различные точки A_H, A_I, A_M таковы, что X является ортоцентром треугольника A_HBC, центром вписанной окружности треугольника A_IBC и точкой пересечения медиан треугольника A_MBC. Докажите, что если A_HA_M и BC параллельны, то A_I – середина A_HA_M.

Е.Бакаев

6. Для каких натуральных n верно следующее утверждение: для произвольного многочлена P степени n с целыми коэффициентами найдутся такие различные натуральные a и b, для которых $P(a)+P(b)$ делится на $a + b$?

Г.Жуков

Публикацию подготовили И.Богданов, С.Дориченко, Л.Медников

XXV Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» в рамках международной программы «Дети. Интеллект. Творчество» при участии МГУ имени М.В.Ломоносова, Института педагогических исследований одаренности РАО (г. Новосибирск) и при поддержке Международной ассоциации «Педагогика одаренности и таланта», Фонда «1С» и журналов «Квант», «Потенциал» и «Физика для школьников» провел XXV Международную тест-рейтинговую олимпиаду «Интеллектуальный марафон».

Олимпиада проходила со 2 по 9 октября 2016 года в городе Протвино Московской области на базе Института физики высоких энергий. На олимпиаду приехали участники из разных городов России. Одаренные школьники 9–11 классов, проявившие интерес к фундаментальным наукам, соревновались в командных и индивидуальных турах по математике, физике, истории научных идей и открытий. Педагоги и психологи собрались на свою научную сессию в восьмой раз.

В индивидуальных соревнованиях на этот раз победили учащиеся лицея 2 из города Альметьевска (Татарстан). Абсолютным победителем олимпиады стал Эдуард Сабиров, ему были вручены большая золотая медаль, золотая медаль по физике и серебряная медаль по математике. Вторым призером в общем зачете стал Руслан Камалов, получивший большую серебряную медаль и малую золотую медаль по математике. Большую бронзовую медаль завоевал Азат Яманаев, он получил также малую бронзовую медаль по физике.

Уже пятый раз встречаются на Международном математическом турнире имени М.В.Ломоносова младшие школьники – учащиеся 5–8 классов, являясь олимпийским резервом олимпиады «Интеллектуальный марафон».

Команда московской школы «Базис» обсуждает задание на устных командных соревнованиях по физике

Соревнования «Математический биатлон» для 7–8 классов выиграл Егор Мартынов, второе место занял Александр Мальцев, а третье место разделили Алексей Фролов и Владимир Шаймарданов (все – из команды лицея 2 города Бугульмы, Татарстан). В индивидуальных соревнованиях победил Егор Мартынов, призерами стали Алексей Фролов и Александр Мальцев (все – из команды лицея 2 города Бугульмы). Традиционный приз «Берестяная тарелка» был вручен Радмиле Заикиной (лицей 2 из Альметьевска) и Егору Мартынову.

Все победители и призеры получили разные подарки и призы от организаторов и спонсоров олимпиады.

Международный интеллект-клуб «Глюон» приглашает региональные центры, школы, лицеи и гимназии, работающие с одаренными детьми, принять участие в XXVI Международной олимпиаде «Интеллектуальный марафон», которая пройдет в октябре 2017 года в Израиле.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Россия, Москва, Пролетарский проспект, д.15/6, корп. 2, МИК «Глюон»

Телефон: +7(925)517-8014

Факс: (495)396-8227

E-mail: gluon@yandex.ru (см. также сайт: http:www.gluon.ru)

Олимпиада по фундаментальным наукам

МАТЕМАТИКА

Письменный индивидуальный тур

1. Даны 10 чисел: $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{10}$. Какое из двух чисел

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_6}{6} \text{ или } \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10}}{10}$$

больше?

2. В трапеции $ABCD$ проекция диагонали AC на основание AD равна средней линии, а диагонали AC и BD перпендикулярны. Найдите боковые стороны трапеции, если $AD = a$, $BC = b$.

3. Чему может быть равно отношение корней уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (b \neq 0),$$

если $3b^2 = 16ac$?

4. Натуральное число записывается на доске. Его последняя цифра стирается. Стертая цифра умножается на 5, а результат прибавляется к оставшемуся на доске числу. Можно ли с помощью таких операций из числа 2016^{2016} получить число 2015^{2015}?

5. На сторонах AB, BC, CD и AD прямоугольника $ABCD$ взяли соответственно четыре точки K, L, M, N, отличные от вершин прямоугольника. Найдите наименьшую возможную величину периметра четырехугольника $KLMN$, если $AB = a$, $BC = b$.

6. Над любыми двумя действительными числами производится операция $*$ с такими свойствами:

1) $x * x = 0$; 2) $x * (y * z) = (x * y) + z$.

Найдите $2016 * 2015$.

7. Пусть T_n – количество последовательностей из нулей и единиц длины n, в которой никакие три единицы не стоят рядом. Существуют ли такие n, что числа T_n, T_{n+1}, T_{n+2} одновременно: а) четные; б) нечетные? в) А существуют ли такие n, что оба соседних числа T_n, T_{n+1} делятся на 2016?

Устный командный тур

1. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля. Через сколько времени они встретились, если автомобиль, выехавший из пункта A, доехал до пункта B через 9 часов после встречи автомобилей, а автомобиль, выехавший из B, приехал в A через 4 часа после встречи?

2. Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на сторонах четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$. Может ли площадь $ABCD$ быть больше площади $A_1B_1C_1D_1$?

3. Является ли число 16016003 простым?

4. Сколько сторон имеет выпуклый n-угольник, если число его диагоналей равно 119?

5. Какое наибольшее количество месяцев, содержащих пять пятниц, может быть в году?

6. Даны прямая l и точка A вне нее. Проведя всего три линии циркулем и линейкой, постройте прямую, проходящую через точку A параллельно прямой l.

7. Какое из положительных чисел a или b больше, если $a(1-b) > \frac{1}{4}$?

8. В однокруговом турнире по волейболу (за победу присуждается одно очко, за поражение – ноль, ничьих не бывает) участвовали 12 команд. Можно ли выбрать три команды A, B и C так, чтобы A выиграла у B, B – у C, а C – у A, если ни одна из команд не набрала 7 очков?

9. Сколько сейчас лет моему племяннику, если в году с номером x^2 ему исполнится x лет?

10. Три мотоциклиста A, B и C выехали из одной точки кольцевой дороги с постоянными скоростями в одном направлении. Через некоторое время они снова оказались в одной точке. Сколько раз мотоциклист A обгонял C, если A обгонял B три раза, а B обгонял C четыре раза?

История научных идей и открытий

1. Легендарная школа Пифагора, заложившая основы математической науки, среди прочих задач занималась задачей о нахождении целочисленных прямоугольных треугольников. В частности, пифагорейцы нашли бесконечные серии (не все) троек натуральных чисел (a,b,c), для которых $a^2+b^2=c^2$.

Вслед за пифагорейцами выясните, существует ли целочисленный прямоугольный треугольник, одним из катетов которого является число: а) 2015; б) $2k+1$, где k – произвольное натуральное число.

2. В Древнем Египте представляли дроби в виде суммы различных долей (т.е. дробей вида $\frac{1}{n}$). В папирусе жреца Ахмеса имелись даже таблицы таких представлений для дробей вида $\frac{2}{n}$ для $5 \le n \le 99$.

Представьте в виде суммы долей дроби: а) $\frac{2}{19}$; б) $\frac{7}{19}$.

3. Архимед при вычислениях, связанных с окружностью, пользовался утверждением, которое в современной формулировке выглядит так: «В дугу AB вписана ломаная AMB из двух отрезков ($AM > MB$). Тогда основание перпендикуляра KH, опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM, делит ломаную пополам: $AH = HM + MB$.

а) Докажите утверждение Архимеда.

б) Какую тригонометрическую формулу заменяло в вычислениях Архимеда это утверждение? Запишите эту формулу.

4. Французский математик монах Марин Мерсенн (1588–1648) состоял в переписке с крупнейшими математиками своего времени (Ферма, Паскалем, Декартом и др.). Его переписка исполняла роль своего рода математического журнала. Сам Мерсенн изучал, среди прочего, совершенные числа, т.е. числа, равные сумме своих делителей, отличных от самого числа. Всякое четное совершенное число имеет вид $2^{n-1}(2^n-1)$, если число 2^n-1 является простым. Простое число вида 2^n-1 называется числом Мерсенна.

Докажите, что если 2^n-1 простое число, то и число n простое.

5. 5 августа 2002 года исполнилось 200 лет со дня рождения великого математика, прожившего очень короткую жизнь – неполных 27 лет. Он внес гигантский вклад во многие разделы математики. Теоремы и термины, связанные с его именем, известны всем математикам, начиная с первого курса университета. Одним из самых его замечательных результатов является доказательство теоремы, окончательно решившей проблему, связанную с алгебраическими уравнениями и не поддававшуюся усилиям математиков в течение многих столетий.

Кто этот математик и о какой теореме идет речь? Назовите какие-нибудь известные вам термины, теоремы и факты, связанные с его именем.

ФИЗИКА

Письменный индивидуальный тур

1. Железнодорожный рабочий массой $m = 60$ кг стоит на краю неподвижной тележки массой $M = 100$ кг (рис.1). Человек хочет, оттолкнувшись от края тележки, запрыгнуть

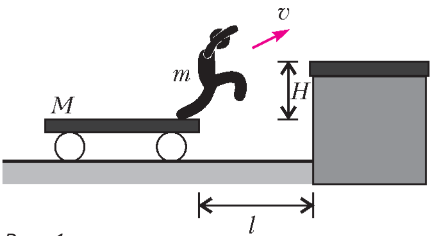


Рис. 1

на платформу, которая выше тележки на $H = 30$ см и находится от тележки на расстоянии $l = 1$ м. Какую минимальную работу он должен для этого совершить? Какова минимальная скорость такого прыжка? Трением между тележкой и землей пренебречь.

2. В длинной закрытой трубке между двумя поршнями массой $m = 1$ кг каждый находится $\nu = 0{,}1$ моль Ar (аргона). В остальном пространстве трубки – вакуум. В начальный момент левый поршень имеет скорость $v_1 = 15$ м/с, а правый – скорость $v_2 = 5$ м/с (рис.2). Найдите максимальную температуру газа в процессе движения, если стенки трубки и поршни теплонепроницаемы. Температура газа в начальный момент равна $T_0 = 300$ К. Трением пренебречь.

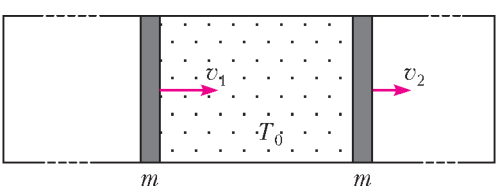


Рис. 2

3. Конденсатор имеет вид пластикового сосуда с тонкими стенками в форме прямоугольного параллелепипеда (рис. 3). Боковые стороны сосуда металлизированы и расположены друг от друга на расстоянии $l = 1$ см. Сосуд заполнен жидким диэлектриком, плотность которого $\rho = 1{,}4$ г/см^3, а диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 65$. Диэлектрик и стенки сосуда химически нейтральны. Сосуд подключен к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 100$ В. На нижней грани сосуда открывают отверстие O, через которое начинают откачивать жидкость. Масса откачиваемого в единицу времени диэлектрика $\mu = 100$ г/с. Определите зависимость показаний амперметра от времени. Батарея и амперметр идеальные.

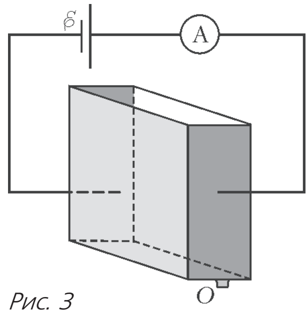


Рис. 3

4. Два спутника-зонда движутся по пересекающимся круговым орбитам вокруг малой планеты. Угол между плоскостями орбит $\alpha = 75°$ (рис. 4). Масса одного спутника $M = 100$ кг. При какой массе m другого спутника он может полностью потерять скорость после упругого столкновения с первым спутником и упасть на планету?

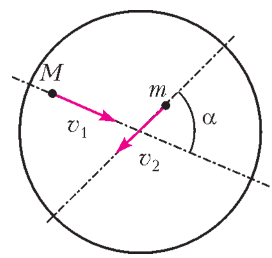


Рис. 4

5. На торжественном открытии XXV Интеллектуального марафона на длинном гладком столе выставлены в ряд двадцать пять брусков одинаковой массой m, на каждом из которых написан год работы МИК «Глюон», с равными зазорами длиной $l = 0{,}2$ м между брусками (рис.5). Со словами «25-й юбилейный марафон открыт» Президент МИК «Глюон» запускает слева вдоль линии стоящих брусков брусок массой $3m$ со скоростью $v_0 = 10$ м/с, что приводит к столкновениям брусков. Найдите время от

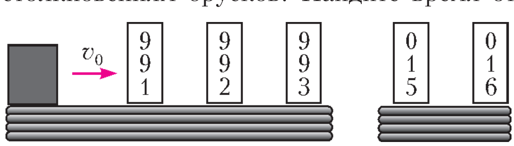


Рис. 5

момента первого соударения до момента падения первого бруска, время падения бруска, соответствующего ИМ-2000, а также время последнего столкновения в этой системе, считая все соударения упругими. Упадет ли последний брусок к закрытию олимпиады, которое состоится через 6 дней?

6. На задней стенке аквариума нарисован цветок ромашка. Во сколько раз изменится угловой диаметр ромашки при наполнении аквариума водой, если глаз наблюдателя расположен на расстоянии l = 30 см от передней стенки аквариума? Длина самого аквариума L = 60 см. Толщиной стенок аквариума пренебречь и считать, что размеры ромашки много меньше размеров аквариума.

7. Сферическую оболочку радиусом R_1 = = 40 см, равномерно заряженную зарядом q = 1 мКл, расширили до радиуса R_2 = 50 см. Найдите работу, совершенную при этом электрическими силами.

Устный командный тур

1. Свет вокруг нас. Почему днем небо голубое, солнце желто-белое, а на закате солнце и небо красные?

2. Шахта на полюсе. На Северном полюсе Земли вдоль земной оси вырыли шахту, проходящую через всю Землю и выходящую на Южном полюсе. В шахту отпустили свободно падать небольшой предмет. Опишите движение предмета, укажите основные параметры движения и оцените их значения.

3. Космическое путешествие. Когда мы движемся вокруг Солнца быстрее – днем или ночью?

4. По следам барона Мюнхгаузена. По словам барона Мюнхгаузена, он смог поймать пушечное ядро руками. Пренебрегая тем, что ядро горячее, поясните, мог бы он это сделать в 18 веке и мог бы сейчас. Считайте, что максимальная дальность полета ядра 1 км, а сопротивлением воздуха можно пренебречь.

5. Парадоксы веса. Отличаются ли вес 1 кг платины и вес 1 кг алюминия?

6. Холодильник. Нам нужно остудить банку, наполненную горячей водой. У нас есть лед и даже сухой лед. Как расположить лед относительно банки, чтобы побыстрее охладить воду?

7. Спутник Земли. Спутник, движущийся по круговой орбите вокруг Земли, из-за трения о верхние слои атмосферы медленно теряет энергию. Будет ли при этом изменяться его скорость и если будет, то как? Ответ поясните расчетом.

История научных идей и открытий

1. Нобелевская премия по физике в 1956 году была вручена трем американским ученым за фундаментальные исследования в области физики твердого тела и открытие эффекта, который уже к тому времени стал основой нового направления электронной техники. Приборы, созданные на основе этого эффекта, быстро стали применяться как в «серьезной» электронике, так и в бытовой электронной технике. Электронная аппаратура стала компактной, а при развитии этого направления – и сверхминиатюрной. Один из лауреатов стал единственным физиком, получившим Нобелевскую премию по физике дважды. Второй раз он стал лауреатом в 1972 году за работы в области сверхпроводимости.

1) Назовите лауреатов Нобелевской премии по физике 1956 года.

2) Назовите эффект и прибор, созданный на основе их исследований.

2. Четыре года назад в газете «The New York Times» были опубликованы результаты опроса, проведенного среди выдающихся физиков. Каждый опрошенный должен был назвать десять самых красивых за всю историю физических экспериментов.

Назовите эти эксперименты.

3. Физик-теоретик, один из основателей современной теоретической физики, лауреат Нобелевской премии по физике 1921 года, общественный деятель-гуманист. Жил в Германии, Швейцарии и США. Почетный доктор около 20 ведущих университетов мира, член многих Академий наук, в том числе почетный член АН СССР. Автор более 300 научных работ по физике, а также около 150 книг и статей в области истории и философии науки, публицистики и др. Разработал несколько значительных физических теорий, которые нашли экспериментальное подтверждение. Написав в 1939 году письмо Президенту США о необходимости вести исследования в области практического применения ядерной энергии, впоследствии активно выступал против войны, против применения ядерного оружия, за гуманизм, уважение прав человека, взаимопонимание между народами.

1) Кто этот ученый?

2) Каковы основные научные достижения этого ученого?

4. В течение 2016 года в научной печати и в СМИ обсуждались результаты эксперимента, которые явились еще одним подтверждением общей теории относительности.

Назовите этот экспериментально обнаруженный эффект.

5. В 70-е годы XX века в Институте физики высоких энергий были получены экспериментальные результаты, подтверждающие теоретические представления о неэлементарности элементарных частиц.

1) Назовите экспериментальную установку, на которой были получены результаты.

2) Какую частицу исследовали?

3) В чем заключалась обнаруженная неэлементарность?

V Международный математический турнир имени М.В. Ломоносова

7–8 классы

Письменный индивидуальный тур

1. Представьте дробь $\frac{17}{2016}$ в виде суммы двух дробей с меньшими знаменателями.

2. Бригада из нескольких рабочих за семь полных дней может выполнить такое задание, какое может выполнить эта бригада без двух человек за несколько полных дней. Найдите, какое наибольшее число рабочих могло быть в этой бригаде первоначально (предполагается, что производительность рабочих одинакова).

3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла на гипотенузу AB опущена высота CH. Биссектриса AK угла A пересекает эту высоту в точке L. Докажите, что треугольник CKL равнобедренный.

4. Как с помощью четырех взвешиваний на чашечных весах без гирь определить среди 12 монет фальшивую, если неизвестно, легче или тяжелее эта монета?

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите такую точку M, что сумма расстояний от этой точки до всех восьми вершин параллелепипеда минимальна. Ответ обоснуйте.

Устный командный тур

1. В треугольнике ABC прямая, проходящая через вершину A и делящая медиану BM в отношении 1:2, считая от вершины, пересекает сторону BC в точке K. Найдите отношение площадей треугольников ABK и AKC.

2. Натуральные числа от 1 до 1000 выписываются подряд в обратном порядке. Получается ряд цифр 1000999998 … 321. Определите, какая цифра стоит в этом ряду на 2016-м месте.

3. На шахматной доске изображена окружность, целиком лежащая на черных клетках. Определите, каким может быть максимальный радиус такой окружности.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с равными сторонами AB и BC окружность, проходящая через вершины B, C и середину K стороны AB, пересекает прямую, содержащую высоту BH, в точке L. Докажите, что треугольник AKL равнобедренный.

5. Найдите различные натуральные числа m и n такие, что $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{7}$.

Публикацию подготовили В.Альминдеров, А.Егоров, А.Кравцов, В.Крыштоп, А.Марковичев, Ж.Раббот

Наполеон-водолаз и Фейнман-экспериментатор

(Начало см. на с. 42)

История с фейнмановским экспериментом содержится в разделе с одноименным с книгой названием. А в разделе «Итальянский или латынь?» Фейнман рассказывает о своей любви к итальянскому.

• https://en.wikipedia.org/wiki/Feynman_sprinkler

Статья в английской википедии.

• http://isl.livejournal.com/338905.html

Поэтический текст Ильи Лапина об игрушках с вербной ярмарки, среди которых на первом месте водолаз – *«Американский Житель, Настоящий янки, Плавающий в банке»*. Текст начинается с еще одной политической сатиры, содержит цитаты из Набокова, Тэффи, Сергея Горного, Мстислава Добужинского, Маршака, а также множество картинок.

Олимпиада «Ломоносов»-2017

МАТЕМАТИКА

В соответствии с Порядком проведения олимпиад школьников, олимпиада «Ломоносов» проводилась в 2016/17 учебном году в два этапа: отборочный и заключительный. Отборочный этап проводился в режиме «он-лайн» и состоял из двух независимых друг от друга туров. Каждый школьник мог участвовать в любом из них или в обоих (в последнем случае засчитывался результат второго тура). Все задания публиковались на сайте олимпиады http://olymp.msu.ru

К участию в заключительном (очном) этапе, который проводился в марте 2017 года в Москве и ряде городов России, допускались только победители и призеры отборочного этапа.

Отборочный этап

Первый тур

1. Проезд в Москве по карте «Тройка» в 2016 году стоит 32 рубля за одну поездку на метро и 31 рубль за одну поездку на наземном транспорте. Какое наименьшее суммарное число поездок можно совершить по этим тарифам, потратив ровно 5000 рублей?

2. Определите количество кратных трем натуральных делителей числа

$$11! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 10\cdot 11.$$

3. Найдите все корни уравнения $\sin(\pi\cos 2x) = \cos\left(\pi\sin^2 x\right)$, лежащие на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{3}; -\frac{5\pi}{6}\right]$. В ответ запишите деленную на π сумму этих корней (в радианах), округлив ее при необходимости до двух знаков после запятой.

4. В окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD. Определите расстояние между серединой отрезка AD и прямой BC, если $AC = 6$, $BC = 5$, $BD = 3$. Ответ при необходимости округлите до двух знаков после запятой.

5. Решите неравенство

$$8\cdot\frac{|x+1|-|x-7|}{|2x-3|-|2x-9|} + 3\cdot\frac{|x+1|+|x-7|}{|2x-3|+|2x-9|} \le 8.$$

В ответ запишите сумму его целочисленных решений, удовлетворяющих условию $|x| < 120$.

6. На доске написано 5 целых чисел. Сложив их попарно, получили следующий набор из 10 чисел: -1, 4, 6, 9, 10, 11, 15, 16, 20, 22. Выясните, какие числа написаны на доске. В ответ напишите их произведение.

7. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, середина высоты которой удалена от боковой грани и от бокового ребра на расстояния 2 и $\sqrt{12}$ соответственно. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

8. В разложении функции

$$f(x) = \left(1 + x - x^2\right)^{20}$$

по степеням x найдите коэффициент при x^{3n}, где n равно сумме всех коэффициентов разложения.

9. Найдите наименьшее четырехзначное число, не кратное 10 и обладающее следующим свойством: если переставить цифры в обратном порядке, то получится число, которое является делителем первоначального, причем частное отлично от единицы.

10. Предложите текстовую задачу, сводящуюся к решению неравенства

$$\frac{11}{x+1{,}5} + \frac{8}{x} \ge \frac{12}{x+2} + 2.$$

Напишите формулировку задачи, ее решение и ответ.

Второй тур

1. Если 200-й день какого-то года воскресенье и 100-й день следующего за ним года – тоже воскресенье, то каким днем недели был 300-й день предыдущего года? В ответ впишите номер этого дня недели (если понедельник, то 1, если вторник, то 2 и т. д.).

2. Сколько слагаемых получится, если в выражении $\left(4x^3 + x^{-3} + 2\right)^{2016}$ раскрыть скобки и привести подобные члены?

3. Знайка вырезал из бумаги полукруг. Незнайка отметил на диаметре AB этого полукруга точку D и отрезал от полукруга Знайки два полукруга с диаметрами AD и DB. Найдите площадь оставшейся фигуры, если длина лежащей внутри нее части хорды, проходящей через точку D перпендикулярно AB, равна 6. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

4. Функция f удовлетворяет равенству

$$(x-1)f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x-1}$$

для каждого значения x, не равного 0 и 1. Найдите $f\left(\frac{2016}{2017}\right)$.

5. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 10 км, в 7:00 выехал автомобиль. Проехав $2/3$ пути, автомобиль миновал пункт C, из которого в этот момент в пункт A выехал велосипедист. Как только автомобиль прибыл в B, оттуда в обратном направлении сразу же выехал автобус и прибыл в A в 9:00. В скольких километрах от B автобус догнал велосипедиста, если велосипедист прибыл в пункт A в 10:00 и скорость каждого участника движения постоянна?

6. Найдите сумму всех целых чисел $x \in [-3; 13]$, удовлетворяющих неравенству

$$\left(1-\mathrm{ctg}^2\frac{\pi x}{12}\right)\left(1-3\mathrm{ctg}^2\frac{\pi x}{12}\right)\times$$
$$\times\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\pi x}{6}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi x}{4}\right)\le 16.$$

7. В двугранный угол вписаны два шара так, что они касаются друг друга. Радиус одного из шаров в 2 раза больше другого, а прямая, соединяющая центры шаров, образует угол $45°$ с ребром двугранного угла. Найдите величину двугранного угла. В ответ запишите косинус этого угла, округлив его при необходимости до двух знаков после запятой.

8. Вычислите

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}.$$

Если требуется, округлите ответ до двух знаков после запятой.

9. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого в десятичной записи n вместе с n^2 используются все цифры от 1 до 9 ровно по одному разу.

10. Составьте текстовую задачу, сводящуюся к решению неравенства

$$\frac{50}{2x+2}+\max\left(\frac{20}{x},\frac{30}{x+2}\right)\le 10.$$

Напишите условие задачи, ее решение и ответ.

Заключительный этап

1. Когда автомобиль едет из пункта A в пункт B, он тратит 25% времени на путь в гору, 60% – по равнине, а остальное время – с горы. Время его движения из A в B и по той же дороге из B в A одинаково, а его скорости в гору, с горы и по равнине постоянны, но различны. Во сколько раз быстрее автомобиль едет с горы, чем в гору?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=2\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}+\sqrt{2}.$$

3. Выясните, какое из чисел больше: $11^{\lg 121}$ или $10\cdot 10^{\lg^2 11}+11$.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Касательные к этой окружности, проведенные в точках A и C, пересекаются на прямой BD. Найдите сторону AD, если $AB = 2$ и $BC : CD = 4 : 5$.

5. Вычислите $\sqrt{n}+\sqrt{n+524}$, если известно, что это число рациональное и что n – натуральное.

6. В прямой круговой конус, радиус основания которого равен 2, вписан шар. Найдите объем этого шара, если он в три раза меньше объема конуса.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно из следующих двух утверждений является истинным:

1) уравнение $\cos(\cos x)+\sin(\sin x)=a$ имеет ровно два корня на отрезке $[0;\pi]$;

2) уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x=a$ имеет корни.

8. Рассматриваются всевозможные наборы, которые состоят из 2017 различных натуральных чисел и в каждом из которых ни одно из чисел нельзя представить в виде суммы двух других чисел этого набора. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее число в таком наборе?

ФИЗИКА

В 2016/17 учебном году олимпиада «Ломоносов» по физике в МГУ проводилась в два этапа – отборочный и заключительный.

Отборочный этап

Отборочный этап проходил в форме заочного испытания. На этом этапе каждый ученик 10 или 11 класса мог участвовать, по собственному выбору, в одном или двух турах, проводимых по единой форме и с равноценными заданиями. Задания олимпиады были размещены в интернете на сайте http://olymp.msu.ru. Доступ к условиям заданий был открыт для участников дважды: с 13 по 16 ноября 2016 года (первый тур) и с 30 ноября по 3 декабря 2016 года (второй тур). Прием решений и ответов по каждому из туров прекращался одновременно с их завершением. Для учеников 7–9 классов отборочный этап проводился в один тур с 13 ноября по 3 декабря 2016 года.

Победители и призеры отборочного этапа были приглашены для участия в заключительном (очном) этапе олимпиады.

7–9 классы

1. Вратарь школьной футбольной команды Игорь ударом ноги отбил мяч от ворот на расстояние $l = 20$ м, при этом мяч опустился на землю через $\tau = 3$ с после удара. На какое максимальное расстояние L мог бы отбить Игорь мяч ударом той же силы, если бы он лучше знал физику? Сопротивлением воздуха пренебрегите. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с^2. Ответ приведите в метрах, округлив до одного знака после запятой.

2. На гладком столе лежит доска массой $M = 500$ г, на краю которой покоится маленькая шайба массой $m = 100$ г (рис.1). Коэффициент трения между шайбой и доской $\mu = 0{,}1$. Какую максимальную по модулю скорость v_0 можно сообщить шайбе, чтобы, пройдя по доске путь до уступа и обратно, она осталась на доске? Длина доски до уступа $l = 1$ м. Удар шайбы об уступ считайте абсолютно упругим. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

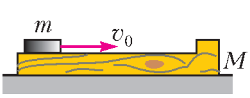


Рис. 1

3. Влажный снег при температуре $t_0 = 0°$ C представляет собой смесь воды и кристалликов льда. Для определения количества льда и воды в снеге провели следующий опыт. Набрав снег в два одинаковых стакана, один из них поместили в холодильник при нулевой температуре, а другой вместе с содержимым нагрели до температуры $t_1 = 100°$ C. Затем смешали содержимое обоих стаканов в калориметре с малой теплоемкостью. После установления теплового равновесия оказалось, что температура содержимого калориметра равна $t_2 = 30°$ C. Определите отношение k массы льда к массе воды во влажном снеге по результатам этого опыта. Удельная теплоемкость воды $c_в = 4{,}2$ кДж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг. Ответ выразите в процентах, округлив до целого.

4. Для измерения сопротивления резистора последовательно с ним включают амперметр, который показывает силу тока $I = 5$ А, а к концам резистора подключают вольтметр, который показывает напряжение $U = 100$ В. Внутреннее сопротивление вольтметра $r = 1$ кОм, а внутренним сопротивлением амперметра можно пренебречь. Определите по этим данным сопротивление резистора R. Ответ приведите в омах, округлив его до одного знака после запятой.

5. Зеркальная дверь AO может вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку O (рис.2). Мальчик M и девочка $Д$ стоят перед дверью, как показано на рисунке, причем угол AOM, т.е. α, равен $30°$, а угол $AOД$, т.е. β, равен $60°$. На какой минимальный угол φ в направлении, указанном стрелкой, нужно повернуть дверь, чтобы мальчик перестал видеть в ней изображение девочки? Ответ приведите в градусах, округлив до одного знака после запятой.

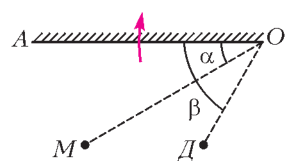


Рис. 2

6. На горизонтальном дне бассейна лежит однородная балка, имеющая форму прямой призмы с основаниями в виде правильных треугольников (рис.3). Когда в бассейн наливают воду в таком количестве, что поверхность воды оказывается на одном уровне с верхним ребром балки, сила давления бал-

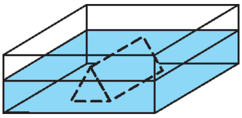


Рис. 3

ки на дно увеличивается на величину, равную n = 60% от веса балки в воздухе. Найдите плотность ρ материала балки, если известно, что балка прилегает к дну бассейна без зазора. Плотность воды $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3. Ответ округлите до одного знака после запятой.

10–11 классы

Первый тур

1. На уроке астрономии учитель рассказал школьникам о существовании во Вселенной так называемых двойных звезд – систем из двух гравитационно связанных звезд, обращающихся по замкнутым орбитам вокруг общего центра масс. Учитель также сообщил, что одним из методов определения масс компонентов двойных звезд является измерение периода их обращения и расстояния между звездами, и предложил школьникам решить следующую задачу: «Две одинаковые звезды движутся вокруг общего центра масс по окружности радиусом $R = 10^{10}$ м, располагаясь на противоположных концах диаметра окружности, причем период обращения звезд равен T = 12,5 земных суток. Пренебрегая влиянием других небесных тел и приняв гравитационную постоянную равной $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2, определите массу M каждой из звезд». Какой результат получили школьники? Ответ приведите в килограммах, поделив его на 10^{30} и округлив до одного знака после запятой.

2. Максимальная скорость, с которой велосипедист может пройти поворот радиусом R = 30 м на велотреке с горизонтально расположенным дорожным полотном, равна v = 13 м/с. С какой максимальной скоростью u велосипедист может пройти такой же поворот на треке с дорожным полотном, наклоненным в сторону центра закругления под углом $\alpha = 30°$ к горизонту? Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Ответ округлите до десятых.

3. Рабочим телом теплового двигателя является некоторое количество аргона. Известно, что за один цикл газ совершает работу A = 60 кДж. При этом его внутренняя энергия U меняется так, как показано на рисунке 4, где участок 2–3 – отрезок параболы, левая ветвь которой проходит через начало координат. Чему равно исходное значение внутренней энергии газа U_0? Ответ приведите в килоджоулях, округлив до целых.

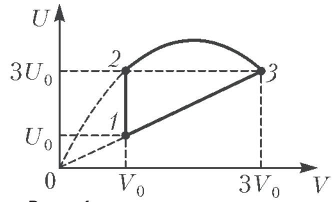


Рис. 4

4. На гладкую пластмассовую спицу, изогнутую в виде кольца радиусом R = 10 см, надета бусинка массой m = 0,1 г, несущая электрический заряд q = 100 нКл. В начальном состоянии бусинка покоится. Затем к кольцу подносят постоянный магнит и начинают перемещать его так, что магнитный поток через кольцо меняется во времени равномерно от нуля до $\Phi = 1$ Вб. С какой скоростью v будет двигаться после этого бусинка по кольцу? Ответ приведите в мм/с, округлив до одного знака после запятой.

5. Учитель принес на урок физики сплошной шар размером с футбольный мяч, изготовленный из некоторого прозрачного материала. Когда любознательный школьник, держа этот шар вблизи своего глаза, смотрел сквозь шар в окно, на противоположную от его глаза поверхность шара села муха (рис.5). Увидев ее, ученик с удивлением заметил, что теперь шар кажется ему в k = 1,5 раза больше, чем на самом деле. Учитель попросил школьника определить показатель преломления n материала, из которого сделан шар. Какой результат получил школьник? Ответ приведите с точностью до второго знака после запятой.

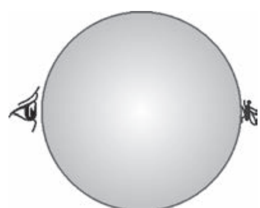


Рис. 5

Указание. Для малых значений аргумента x, выраженного в радианах, справедливы такие приближенные формулы: $\operatorname{tg} x \approx \sin x \approx x$.

Второй тур

1. На уроке астрономии учитель рассказал школьникам о существовании в Солнечной системе большого количества астероидов и малых планет, некоторые из которых при определенных условиях могут представлять угрозу для жизни на Земле. В качестве наглядного примера он привел фантастический кинофильм «Армагеддон» (США, 1998 г.). В нем повествуется о космической экспедиции, отправленной на приближающийся к Земле огромный астероид, чтобы его уничтожить. Желая, чтобы школьники лучше представляли себе условия, в которых работали участники экспедиции, учитель предложил им следующую задачу: «Астероид имеет форму шара радиусом R = 5 км. Считая астероид однородным с плотностью $\rho = 5{,}5$ г/см^3, пренебрегая влиянием других небесных тел и приняв гравитационную постоянную равной $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2, найдите первую космическую скорость $v_{1к}$ для этого астероида». Какой результат получили школьники? Ответ округлите до одного знака после запятой.

2. На горизонтальной поверхности льда неподвижно лежит круглая шайба. По льду скользит точно такая же шайба и испытывает с покоящейся шайбой абсолютно упругое соударение. Скорость движущейся шайбы перед ударом $v_0 = 3$ м/с. После удара эта шайба проехала по льду расстояние $l_1 = 1$ м. Определите расстояние L между шайбами после их остановки. Коэффициент трения между шайбами и льдом $\mu = 0{,}05$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Боковые поверхности шайб считайте гладкими. Ответ приведите в метрах и округлите до одного знака после запятой.

3. В два одинаковых сосуда налили по m = 500 г воды. Температура воды в первом сосуде $t_1 = 20$ °C, а во втором $t_2 = 40$ °C. Из второго, более горячего, сосуда в первый переливают Δm = 50 г воды и перемешивают. Затем воду такой же массой Δm переливают обратно во второй сосуд и перемешивают. На этом завершается первый цикл переливаний. Определите разность температур Δt воды в сосудах после трех таких циклов, состоящих из переливания воды из второго сосуда в первый и обратно. Теплоемкостью сосудов и теплообменом воды с окружающей средой можно пренебречь. Ответ приведите в градусах Цельсия с точностью до одной десятой.

4. Плоский воздушный конденсатор, длина обкладок которого L, подключен к источнику постоянного напряжения. Во сколько раз k изменится заряд конденсатора, если в конденсатор параллельно обкладкам вдвинуть металлическую пластину на расстояние L/n, где n = 3 (рис.6)? Толщина пластины равна половине расстояния между обкладками конденсатора, а ширина такая же, как у обкладок. Краевыми эффектами можно пренебречь. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

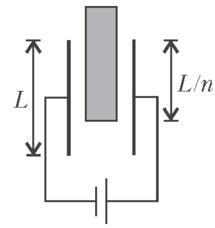


Рис. 6

5. Тонкая плосковыпуклая линза, имеющая в воздухе фокусное расстояние F = 10 см, соприкасается плоской стороной с поверхностью воды, налитой в цилиндрический сосуд (рис.7). На расстоянии d = 20 см от линзы на ее главной оптической оси находится точечный источник света S, дающий узкий пучок света. Определите высоту h уровня воды в сосуде, при котором изображение источника будет расположено точно на дне сосуда. Показатель преломления воды примите равным n = 1,3. Учтите, что для малых значений аргумента x, заданного в радианах, справедливы приближенные формулы $\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x$. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до одного знака после запятой.

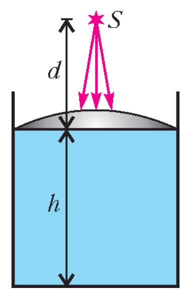


Рис. 7

Заключительный этап

Проведение заключительного этапа олимпиады было назначено на 24 февраля 2017 года. Для учащихся всех классов этот этап проводился в очной форме на физическом факультете МГУ и на четырех региональных площадках в городах Астана, Белгород, Владивосток и Волгоград. Задание для учащихся 7–8, а также 9 классов состояло из четырех задач по темам, изучаемым в рамках программы по физике для основной общеобразовательной школы. Задания для учащихся 10–11 классов были составлены в полном соответствии с Кодификатором ЕГЭ 2017 года по физике и охватывали основные разделы Кодификатора, а именно: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. Типовое задание включало каждый из этих разделов и состояло из кратких вопросов по теории и дополняющих их задач.

7–8 классы

1. Изделие, изготовленное из сплава золота и меди, имеет массу m = 1,6 кг и плотность $\rho = 16{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Считая, что объем сплава равен суммарному объему исходных компонент, определите массу m_1 золота в этом изделии. Плотность золота $\rho_1 = 19{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность меди $\rho_2 = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

2. При медленном растяжении пружины из недеформированного состояния до некоторого удлинения совершена работа A = = 10 Дж. Чтобы удержать пружину в растянутом состоянии, требуется прикладывать к ее концам силы, равные по модулю F = = 20 Н. Определите жесткость k этой пружины.

3. В комнате объемом $V = 60$ м^3 температура воздуха $t_1 = 15$ °С. Какую массу m торфа нужно сжечь в печи, чтобы нагреть воздух в комнате до $t_2 = 25$ °С? Коэффициент полезного действия печи η = 10%, плотность воздуха $\rho = 1{,}2$ кг/м^3, его удельная теплоемкость $c = 1{,}01$ кДж/(кг · °С), удельная теплота сгорания торфа q = 14 МДж/кг. Изменением плотности воздуха в рассматриваемом диапазоне температур можно пренебречь. Ответ приведите в килограммах, округлив до одной сотой.

4. В цепи, схема которой показана на рисунке 8, сила тока, текущего по резистору

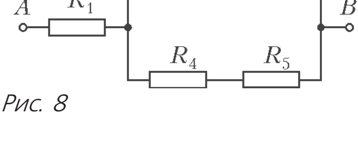


Рис. 8

сопротивлением R_1, равна I = 2 А. Определите напряжение U между точками A и B, если R_1 = 3 Ом, R_2 = 6 Ом, R_3 = 3 Ом, R_4 = 3 Ом, R_5 = 6 Ом.

9 класс

1. Изучив законы механики, ученик решил проверить их экспериментально. Для этого он собрал дома модель игрушечной железной дороги. На прямолинейном участке дороги он поместил симметричную горку высотой H = 0,5 м и длиной основания L = 2 м (рис.9). Сцепив несколько одина-

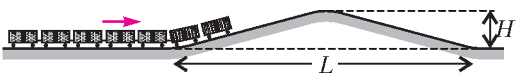


Рис. 9

ковых вагонов, он поставил образовавшийся поезд на горизонтальный участок дороги и толкнул его по направлению к горке со скоростью $v_0 = 3$ м/с. При каком минимальном числе вагонов $N_{\min}$ поезд преодолеет горку и скатится с противоположной стороны? Длина одного вагона l = 10 см. Силами сопротивления и длиной сцепки между вагонами можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

2. В теплоизолированный сосуд с водой общей теплоемкостью $C = 1{,}5$ кДж/°С, имеющий температуру $t_1 = 20$ °С, поместили m = 56 г льда при температуре $t_2 = -8$ °С. Какую температуру t_0 примет содержимое сосуда после установления теплового равновесия? Удельная теплоемкость воды $c_в = 4{,}2$ кДж/(кг · °С), удельная теплоемкость льда $c_л = 2{,}1$ кДж/(кг · °С), удельная теплота плавления льда λ = 330 кДж/кг. Ответ приведите в градусах Цельсия, округлив до одного знака после запятой.

3. Следуя указаниям учителя, ученик собрал электрическую цепь, состоящую из трех резисторов и двух амперметров (рис.10). При этом он заметил, что заводская маркировка на резисторе R_1 стерлась и установить по ней значение сопротивления этого

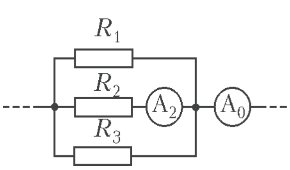


Рис. 10

резистора невозможно. В то же время маркировка на резисторах R_2 и R_3 была четкой, благодаря чему ученик узнал, что R_2 = 20 Ом, а R_3 = 15 Ом. Подключив цепь к источнику постоянного тока (на рисунке не изображен), ученик обнаружил, что амперметр A_2 показывает силу тока $I_2 = 0{,}3$ А, а амперметр A_0 – силу тока $I_0 = 1{,}5$ А. Располагая этими данными и предположив, что сопротивления амперметров пренебрежимо малы, ученик смог рассчитать сопротивление резистора R_1. Какой ответ он получил? Ответ округлите до одного знака после запятой.

4. Две прямые дороги AB и CB пересекаются в точке B под углом $\alpha = 45°$ (рис.11). На перекрестке B установлено широкое плоское зеркало, расположенное перпендикулярно дороге AB так, что велосипедист, едущий к точке B по дороге CB, видит в зеркале бегуна, направляющегося к точке B по дороге AB. Какова скорость бегуна v, если скорость велосипедиста $V = 18$ км/ч, а изображение бегуна приближается к велосипедисту с относительной скоростью $u = V\sqrt{2}$? Ответ приведите в км/ч, округлив до одного знака после запятой.

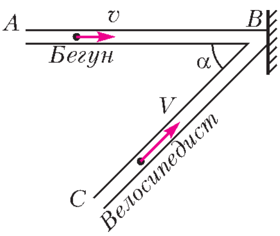


Рис. 11

10–11 классы

1. Сформулируйте закон Гука. Чему равна потенциальная энергия упруго деформированной пружины?

Задача. В устройстве, показанном на рисунке 12, груз массой $M = 0{,}2$ кг подвешен к середине стержня, а стержень расположен горизонтально. Блок, нить, пружины и стержень невесомы, нить нерастяжима. Жесткости пружин $k_1 = 30$ Н/м, $k_2 = 20$ Н/м. Стержень смещают вертикально вниз на небольшое расстояние и отпускают. Определите период T возникших после этого малых вертикальных колебаний груза. Считайте, что стержень в процессе колебаний остается все время горизонтальным.

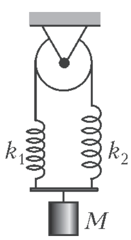


Рис. 12

2. Сформулируйте определение внутренней энергии термодинамической системы. Укажите способы изменения внутренней энергии.

Задача. На рисунке 13 показана pV-диаграмма циклического процесса, проводимого над $\nu = 1$ моль идеального газа. Температура газа в точке *1* равна $T_1 = 200$ К, а его температуры в точках *2* и *3* одинаковы и равны $T_2 = 800$ К. Продолжение прямой *1–3* проходит через начало координат. Определите работу A газа за цикл. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

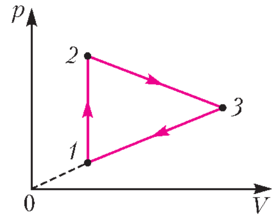


Рис. 13

3. Как определяется потенциал электростатического поля? Чему равен потенциал поля точечного заряда?

Задача. Найдите силу F взаимодействия непроводящей равномерно заряженной полусферы радиусом $R = 10$ см с бесконечно длинным равномерно заряженным тонким стержнем. Один конец стержня расположен в центре полусферы, а направлен стержень вдоль оси симметрии полусферы, как показано на рисунке 14. Поверхностная плотность зарядов на полусфере $\sigma = 10^{-6}$ Кл/м^2, линейная плотность зарядов на стержне $\gamma = 10^{-6}$ Кл/м, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

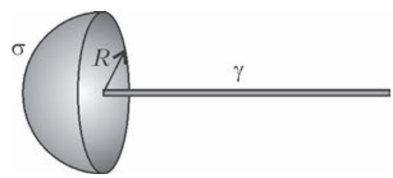


Рис. 14

4. Сформулируйте законы преломления света. Что такое абсолютный и относительный показатели преломления?

Задача. На столе стоит горящая свеча. Школьник с помощью тонкой собирающей линзы получил на стене резкое изображение пламени свечи и обнаружил, что, переместив линзу к стене на расстояние $\Delta l = 0{,}3$ м, можно получить на стене еще одно резкое изображение пламени. Определите фокусное расстояние линзы F. Расстояние от горящей свечи до стены $L = 0{,}9$ м.

Публикацию по математике подготовили Д.Горяшин, А.Зеленский, А.Козко, Л.Крицков, В.Панферов, А.Разборов, И.Сергеев, И.Шейпак, М.Юмашев; по физике – С.Чесноков

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №3)

1. На рисунке 1 показано, как построить заборы общей длиной 650 м.

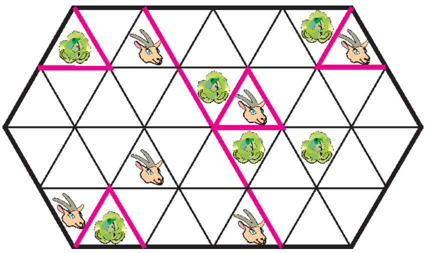


Рис. 1

2. Да, могло.
Подойдут гирьки массами 49,5 г, 50,5 г и 51,5 г. Первая и вторая гирьки вместе весят 100 г, первая и третья – 101 г, а вторая и третья – 102 г.

3. 23.
Раздадим три раза по две пачки, останется $3 \cdot 1 = 3$ печенья. Но те же шесть пачек печенья можно раздать иначе – три и еще три, и тогда останется $2 \cdot 13 = 26$ печений. Значит, 26 – 3 = = 23 печенья можно поделить между туристами поровну. Поскольку число 23 простое, это возможно, только если туристов 23.

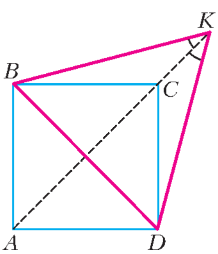


Рис. 2

4. $30°$.
Поскольку картинка симметрична относительно прямой AC, имеем $DK = BK$ (рис.2). По условию, $BK = AC$. А так как диагонали в квадрате равны, $AC = BD$. Таким образом, в треугольнике BKD все стороны равны, т.е. он равносторонний, и $\angle BKD = 60°$. Опять же в силу симметрии относительно прямой AC имеем $\angle BKC = \angle DKC$, а в сумме эти углы составляют $60°$, т.е. каждый из них равен $30°$.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №2)

16. Всего N^4, каждый рассказал по N^3.
Возьмем любого болтуна, кроме последнего, и следующего за ним. Сначала второй на каждом круге рассказывает на анекдот больше, чем первый, – и так N кругов. А после того как болтуны устали, второй рассказывает на анекдот меньше – тоже N кругов. Значит, все рассказали поровну анекдотов, т.е. $1/N$ от общего количества. Всего анекдотов было рассказано

$$1 + 2 + \ldots + \left(N^2 - 1\right) + N^2 + \left(N^2 - 1\right) + \ldots + 2 + 1 =$$
$$= \left(1 + N^2 - 1\right) + \left(2 + N^2 - 2\right) + \ldots + \left(N^2 - 1 + 1\right) + N^2 =$$
$$= N^2 \cdot N^2 = N^4.$$

Тогда каждый рассказал по $N^4/N = N^3$ анекдотов.

17. а) Очевидно, что если мы умеем определять карты, которые лежат в верхней левой четверти квадрата 6×6, то сможем определить и остальные карты. Зададим три вопроса: про квадрат 3×3, для которого карта ведущего лежит в левом верхнем углу этого квадрата, а также про квадраты 3×3, которые получаются из первого квадрата сдвигом на 1 вниз и на 1 вправо. Карта ведущего – единственная, которая лежит в первом квадрате, но не лежит ни во втором, ни в третьем, и мы ее легко определим.
б) 3 хода.
Докажем, что двух вопросов недостаточно.
Пусть мы задали два вопроса (указали два квадрата). Тогда все 36 карт разделятся на 4 части: карты, которые входят в оба квадрата (1-я часть), только в первый квадрат (2-я), только во второй квадрат (3-я) и которые не входят ни в один квадрат (4-я). Если переставить между собой карты внутри любой части, то ответы на вопросы не изменятся. Значит, если карта ведущего попала в часть, в которой больше одной карты, то узнать карту ведущего мы не сможем. Покажем, что часть, в которой находится угловая карта, содержит хотя бы 2 карты. Если угловая карта входит в оба квадрата 3×3, то они совпадают и в этой части 9 карт. Если карта входит только в один из квадратов, то в этой части обязательно будет и одна из соседок угловой карты (либо в строке, либо в столбце). Если же карта не входит ни в один квадрат, то в этой части будет не менее 36 – 9 – – 9 = 18 карт.

18. Продлим стороны углов до пересечения, которое произойдет в одном из узлов (рис.3). Докажем, что четыре красных узла лежат на одной окружности. Красные узлы равноудалены от синего узла, так как все красные отрезки являются диагоналями в равных параллелограммах с углом $60°$ и сторонами 1 и 3.
Тогда два данных угла равны как вписанные в эту окружность.

19. Будем следить за количеством рядов (строк и столбцов), на которых есть хотя бы одна ладья, обозначим его s.

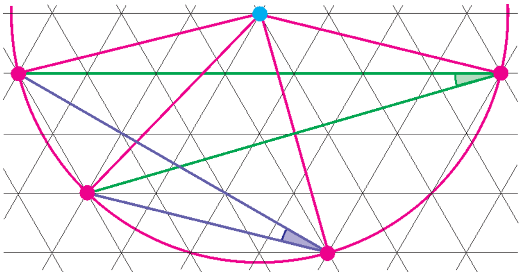


Рис. 3

Если изначально занятых строк x, а занятых столбцов y, то ладей не более xy. Таким образом, $xy \geq 10$. Перебрав возможные значения x от 1 до 6, несложно проверить, что тогда $s = x + y \geq 7$.
В конечном положении все ладьи не бьют друг друга, а это происходит в том и только том случае, когда $s = 20$.
Докажем, что при $s < 20$ всегда можно сделать ход, увеличивающий s. Из этого будет следовать, что не более чем за $20 - 7 = 13$ ходов мы получим расстановку ладей, удовлетворяющую условию.
Рассмотрим все ладьи, которые никого не бьют. Ряды, содержащие такие ладьи, зачеркнем. Допустим, что есть незачеркнутый ряд ровно с одной ладьей, пусть это строка. В столбце, в котором стоит эта ладья, есть хотя бы две ладьи, а значит, есть пустой столбец. Тогда ладью можно передвинуть в него. При этом s увеличивается.
Осталось рассмотреть вариант, когда такого ряда нет. Тогда все незачеркнутые строки либо пустые, либо в них хотя бы две ладьи, причем и те, и другие строки присутствуют. Рассмотрим пустую строку и строку, в которой хотя бы две ладьи, причем такие, что между ними нет незачеркнутых строк. Тогда передвинем ладьи из одной этой строки в другую. Несложно понять, что такой ход сделать можно и s при этом увеличивается.
Можно также показать, что оценка точная, т.е. за 12 ходов можно справиться не всегда (для решения задачи этого не требовалось доказывать).

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Твердая оболочка ореха не пропускает воду, а внутри ореха имеется воздух, обеспечивающий плавучесть и позволяющий долгое время «мигрировать».
2. Многие плоды и семена снабжены либо пучками волосков, как у одуванчика, либо поддерживающими плоскостями-планерами, как у липы, благодаря чему ветер может переносить их весьма далеко от «места рождения».
3. Заметные колебания температуры в горах проявляются в меньшей степени в приземном слое, чем на высоте даже нескольких метров.
4. Подобная форма листьев и лепестков придает им дополнительную жесткость и прочность.
5. Корневая система сосны глубже уходит в землю, чем у ели (рис.4). Чтобы вывернуть ель

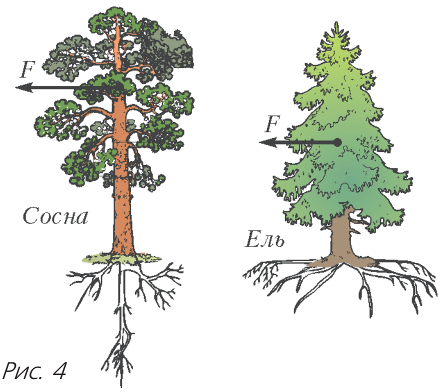


Рис. 4

с корнем, требуется меньший момент силы ветра, чем для сосны. А чтобы вывернуть сосну с корнем, требуется больший момент силы ветра, нежели чтобы поломать ее.
6. Одна из причин – пустотелость стебля. При изгибе внутренняя его область практически не деформируется, в то время как заполняющее эту область вещество лишь увеличивало бы изгибающие и сжимающие силы. Кроме того, стебли злаковых состоят из нескольких полых цилиндров, соединяемых упругими узлами, что сообщает им дополнительную гибкость.
7. В вертикальном положении подводные растения удерживаются силой Архимеда. Ее действие увеличивается за счет воздушных полостей внутри стеблей, играющих роль поплавков.
8. Листья или ряска, покрывающие поверхность воды, могут ограничить диффузионные процессы в снабжении глубоких слоев кислородом, необходимом подводным обитателям.
9. Во всех этих случаях дело в особенностях поверхностей растений, не смачиваемых водой.
10. Чрезмерно высокое дерево не выдержит собственной тяжести – при увеличении его размеров объем и масса растут быстрее, чем площадь основания ствола. Но более жесткое ограничение связано с осмотическим давлением – односторонней диффузией молекул через мембраны клеток, – которое поднимает соки от корней к листьям на высоту не более нескольких десятков метров. Наряду с осмосом подъему

влаги способствуют и капиллярные явления.

11. Быстроте реакции растения способствует электрический импульс, аналогичный возбуждению в нервных волокнах животных.

12. Листья занимают положение, при котором их освещенность минимальна, что предохраняет их от перегрева.

13. Температура воздуха над влажной почвой меняется медленнее.

14. Капли воды фокусируют солнечные лучи на поверхности листа, что приводит к его обугливанию.

15. В присутствии кислорода грибы-гнилушки светятся непрерывно, а большинство светящихся животных дают вспышки света только при стимуляции их люминесцирующих органов.

16. Стекло синей лампы пропускает не только синие лучи, но частично и красные. Вместе с тем листья растений отражают не только зеленый, но отчасти и красный свет.

17. Вода сильно поглощает красные и синие лучи, что придает ей зеленый цвет. Глубоководные водоросли нуждаются в красном пигменте, поглощающем зеленые лучи.

Микроопыт

Интенсивное испарение с поверхности листа понижает его температуру и создает ощущение прохлады.

XXV МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

ОЛИМПИАДА ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ НАУКАМ

МАТЕМАТИКА

Письменный индивидуальный тур

1. Второе число больше.

Обозначим $\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_6}{6}$ через A. Тогда $a_1 = A+\delta_1$, $a_2 = A+\delta_2$, …, $a_6 = A+\delta_6$, $a_7 = A+\delta_7$, …, $a_{10} = A+\delta_{10}$, причем $\delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_6 < \delta_7 < \ldots < \delta_{10}$ и $\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_6 = 0$. Если $\delta_7 \le 0$, то числа δ_1, δ_2, …, δ_6 отрицательны и, вопреки последнему равенству, сумма $\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_6$ тоже должна быть отрицательной. Следовательно, $\delta_7 > 0$, и также положительны числа δ_8, δ_9, δ_{10}. Таким образом,

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{10}}{10} = \frac{10A+\delta_7+\delta_8+\delta_9+\delta_{10}}{10} > A.$$

2. $AB = CD = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Пусть K и L – основания перпендикуляров,

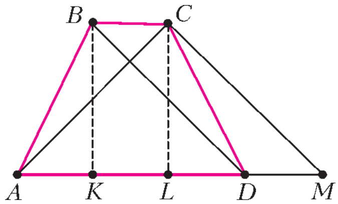


Рис. 5

опущенных соответственно из B и C на большее основание трапеции AD (рис.5). Тогда $KL = BC$, $LD = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}$, $AK = a - \left(\frac{a-b}{2}+b\right) = \frac{a-b}{2}$, прямоугольные треугольники AKB и DLC равны по двум катетам, следовательно, $AB = CD$. Проведем $CM \parallel BD$. Треугольник ACM – прямоугольный, $AM = a+b$, $AL = \frac{a-b}{2}+b = LM$, медиана $CL = \frac{AM}{2} = \frac{a+b}{2}$, поэтому

$$CD^2 = CL^2 + LD^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

3. Отношение корней уравнения равно 3.

Если $b \ne 0$, то $a \ne 0$, $c \ne 0$ и $ac > 0$. Дискриминант квадратного уравнения равен $b^2 - 4ac = \frac{1}{4}b^2$. Корни квадратного уравнения равны $x_1 = \frac{-b-(|b|/2)}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+(|b|/2)}{2a}$. Рассмотрев два варианта $b < 0$ и $b > 0$, получим, что $\frac{x_1}{x_2} = 3$ либо $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{3}$.

4. Нельзя.

Указанная операция заменяет число вида $10a + b$ на число $a + 5b$. При этом $a+5b = 5(10a+b) - 49a$. Следовательно, всякое делящееся на 7 число заменяется на число, тоже делящееся на 7. Число 2016 делится на 7, число 2016^{2016} тоже делится на 7. Но число 2015 не делится на 7, и число 2015^{2015} не делится на 7.

5. $2\sqrt{a^2+b^2}$.

Отразим прямоугольник $ABCD$ вместе с четырехугольником $KLMN$ относительно стороны CD, при этом точки K и N перейдут соответственно в точки K' и N'. Пусть при отражении относительно BC точка K перейдет в точку K'', а при отражении относительно DA' точка K' перейдет в точку K''' (рис.6). Заметим, что $BK'' + A'K''' = b$. Ломаная $K''LMN'K'''$ будет иметь наименьшую длину, если точки K'', L, M, N', K''' окажутся на одной прямой. Так будет, если четырехугольник $KLMN$ – парал-

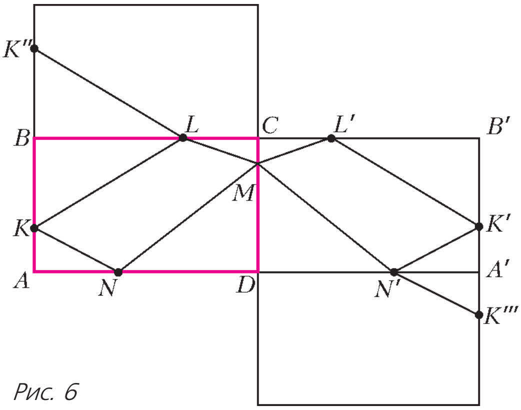


Рис. 6

лелограмм. В этом случае периметр четырехугольника $KLMN$ равен длине отрезка $K''K'''$ и равен $2\sqrt{a^2+b^2}$.

6. 1.

В самом деле,

$$x*0 = x*(x*x) = (x*x)+x = x.$$

Поэтому

$$x = x*0 = x*(x*y) = x*(y*y) = (x*y)+y$$

и $x*y = x-y$.

7. а), б) Не существуют; в) существуют.

Во-первых ясно, что последовательностей из нулей и единиц длины n, начинающихся с 0, столько же, сколько и последовательностей длины $n-1$, т.е. T_{n-1}. Во-вторых, у всякой последовательности, в которой никакие три единицы не стоят рядом и которая начинается на 10, оставшиеся $n-2$ места может занимать любая последовательность рассматриваемого типа; число таких последовательностей равно T_{n-2}. У всякой последовательности, в которой никакие три единицы не стоят рядом и которая начинается на 110, оставшиеся $n-3$ места может занимать любая последовательность рассматриваемого типа; число таких последовательностей равно T_{n-3}.

Таким образом, для натуральных n справедлива рекуррентная формула $T_n = T_{n-1}+T_{n-2}+T_{n-3}$, и при этом $T_1 = 2$, $T_2 = 4$ и $T_3 = 7$. А теперь забудем о последовательностях из нулей и единиц и, следуя полученной рекуррентной формуле, начнем вычислять T_n для $n = 0$ и для целых отрицательных n: $T_3 = T_2+T_1+T_0$, $T_0 = 1$; $T_2 = T_1+T_0+T_{-1}$, $T_{-1} = 1$; $T_1 = T_0+T_{-1}+T_{-2}$, $T_{-2} = 0$; $T_0 = T_{-1}+T_{-2}+T_{-3}$, $T_{-3} = 0$.

Фрагмент бесконечной в обе стороны последовательности … T_{-3}, T_{-2}, T_{-1}, T_0, T_1, T_2, T_3, … дает нам числа … 0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, … Заменим теперь последовательность чисел T_n на последовательность S_n их остатков при делении на 2. Соответствующий фрагмент последовательности S_n: … 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, … . В «арифметике остатков» при делении на 2, в которой 0 + + 0 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0, для членов последовательности остатков выполнено рекуррентное соотношение $S_n = S_{n-1}+S_{n-2}+S_{n-3}$, где n – целое, т.е. всякий член этой последовательности равен сумме трех предыдущих. Но различных наборов из трех остатков при делении на 2 не может быть больше 2^3. Поэтому в последовательности найдутся две тройки одинаковых наборов, а это означает, что члены последовательности остатков периодически повторяются.

а) Если в последовательности остатков найдутся три нуля подряд, то вследствие периодичности все члены последовательности должны быть равны 0, что не так. б) Аналогично предыдущему. Легко убедиться, что на самом деле периодичность последовательности S_n обнаруживается быстрее: $S_1 = S_5$, $S_2 = S_6$, $S_3 = S_7$, $S_4 = S_8$ и т.д. в) Заменим последовательность чисел T_n на последовательность R_n их остатков при делении на 2016. Отметим, что $R_{-3} = R_{-2} = 0$. Для членов последовательности R_n в «арифметике остатков» при делении на 2016 выполнено рекуррентное соотношение $R_n = R_{n-1}+R_{n-2}+R_{n-3}$. Различных наборов из трех остатков не может быть больше 2016^3, поэтому последовательность R_n периодична. Стало быть, для некоторого натурального k верно равенство $R_k = R_{k+1} = 0$, означающее, что T_k и T_{k+1} делятся на 2016.

Устный командный тур

1. Через 6 ч.

2. Да, может. Пример приведен на рисунке 7.

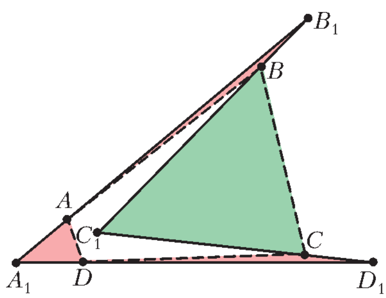


Рис. 7

3. Нет. **4.** 17. **5.** 5.

6. На прямой l возьмем точку O и проведем полуокружность радиусом OA с центром в точке O (первая линия), пересекающую l в точках K и L. Затем раствором циркуля, равным KA, проведем окружность с центром в точке L, пересекающую полуокружность в точке A' (вторая линия). Наконец, линейкой проводим прямую AA' (третья линия).

7. $a > b$. **8.** Можно. **9.** 36 лет. **10.** 8 раз.

История научных идей и открытий

1. а), б) Существует.

Пусть $a = 2k + 1$ – нечетное натуральное число, а $a^2 + b^2 = c^2$. Тогда $c^2 - b^2 = (c-b)(c+b) = (2k+1)^2$. Подберем b и c так, чтобы выполнялись равенства

$$c - b = 1, \quad c + b = (k+1)^2.$$

Треугольник со сторонами $a = 2k + 1$, $b = 2k^2 + 2k$, $c = 2k^2 + 2k + 1$ – искомый.

В частности, для $a = 2015$ получаем $k = 1007$, $b = 2030112$, $c = 2030113$.

2. а) $\frac{2}{19} = \frac{1}{10} + \frac{1}{190}$;

б) $\frac{7}{19} = \frac{2}{19} + \frac{5}{19} = \frac{1}{10} + \frac{1}{190} + \frac{1}{4} + \frac{1}{76}$.

Возможны и другие представления.

3. б) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

4. Воспользуемся тождеством

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right),$$

справедливым для всех натуральных n.

Предположим, что $2^n - 1$ – простое число, а n – составное число, например $n = kp$, где $k > 1$, $p > 1$. Тогда

$$2^n - 1 = \left(2^k\right)^p - 1 = \left(2^k - 1\right)\left(\left(2^k\right)^{p-1} + \left(2^k\right)^{p-2} + \ldots + 1\right)$$

– составное число, вопреки условию.

5. Это великий норвежский математик Нильс Хенрик Абель (5 августа 1802 г. – 6 апреля 1829 г.). В 1823 году он доказал невозможность решить в общем виде (в радикалах) алгебраическое уравнение степени $n \geq 5$. Имя Абеля носят несколько важных теорем из теории степенных рядов. Абелевой обычно называется коммутативная группа.

ФИЗИКА

Письменный индивидуальный тур

1. $A_{\min} = 480$ Дж; $v_{\min} = 3{,}7$ м/с.

2. $T_{\max} = T_0 + \frac{m(v_2 - v_1)^2}{6\nu R} = 320$ К.

3. Амперметр показывает постоянный ток, равный $I = \frac{\mathcal{E}\mu\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{\rho l^2} = 40{,}5$ нА.

4. $m = M(1 - 2\cos\alpha) = 48$ кг.

5. $t_1 = \frac{16l}{v_0} = 0{,}32$ с; $t_2 = \frac{16l}{3v_0}\cdot 2^9 + \sum_{i=1}^{8}\frac{2^i l}{v_0} = 75$ с;

$t_3 = \frac{l}{v_0}\cdot\sum_{i=1}^{24} 2^i = 671088{,}6$ с $= 7$ сут 18 ч 24 мин 48,6 с,

так что до окончания олимпиады упадут не все бруски.

6. $k = \frac{(L+l)n}{L+ln} = 1{,}2$ (здесь $n = 1{,}33$ – показатель преломления воды).

7. $A = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = 2{,}25$ кДж.

Устный командный тур

1. Наблюдаемые явления связаны с закономерностями рассеяния света в атмосфере и с большой чувствительностью глаза в зеленой части спектра.

2. Предмет будет совершать гармонические колебания с амплитудой, равной радиусу Земли. Период колебаний будет совпадать с периодом движения тела по околоземной круговой орбите, т.е. будет немного больше полутора часов.

3. Ночью мы движемся быстрее.

4. В 18 веке не мог бы, а сейчас мог бы.

5. В воздухе вес платинового образца больше алюминиевого.

6. Лед надо расположить сверху, чтобы кроме теплопроводности «работала» и конвекция.

7. Высота спутника будет уменьшаться, а скорость – увеличиваться.

История научных идей и открытий

1. 1) Уильям Шокли, Джон Бардин (он стал дважды лауреатом), Уолтер Браттейн.

2) Транзисторный эффект, полупроводниковый транзистор.

2. Это эксперименты: 1) Эратосфена Киренского, 2) Галилео Галилея (с Пизанской башней), 3) Галилео Галилея (с наклонной плоскостью), 4) Генри Кавендиша), 5) Жана Фуко, 6) Исаака Ньютона (по разложению солнечного света в спектр), 7) Томаса Юнга (по интерференции света), 8) Клауса Йонссона (по интерференции электронов, 1961 г.), 9) Роберта Миллинкена, 10) Эрнеста Резерфорда (по рассеянию альфа-частиц).

3. 1) Альберт Эйнштейн. 2) Специальная теория относительности, общая тория относительности, квантовая теория фотоэффекта, квантовая статистика Бозе–Эйнштейна, статистическая теория броуновского движения и др. Предсказал гравитационные волны и квантовую телепортацию.

4. Открытие гравитационных волн.

5. 1) Ускоритель У-70. 2) Протон. 3) Протон состоит из кварков.

V МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

7–8 классы

Письменный индивидуальный тур

1. Например, $\frac{17}{2016}=\frac{8+9}{2016}=\frac{1}{252}+\frac{1}{224}$.

2. 16.

3. $\angle LKC=\angle AKC=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$ и $\angle CLK=\angle ALH=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$. Поэтому $\angle LKC=\angle CLK$, и треугольник CKL равнобедренный.

4. Разложим монеты на четыре кучки по три монеты и взвесим две любые кучки. Если они равновесны, то все монеты в них правильные, и, сравнив любую из этих кучек с любой из оставшихся, мы определим, в какой из кучек находится фальшивая монета. Если же при первом взвешивании кучки оказались не равновесны, то, сравнив вторым взвешиванием любую из этих кучек с одной из оставшихся правильных кучек, опять определим, в какой из кучек находится фальшивая монета. Взяв любые две монеты из «фальшивой» кучки, в случае их равенства получим, что фальшивой является третья монета (в этом случае четвертого взвешивания не требуется). Если же взятые две монеты различны, то четвертым взвешиванием сравним любую из них с оставшейся правильной.

5. В прямоугольнике ABC_1D_1 диагонали AC_1 и BD_1 в точке пересечения делятся пополам, в прямоугольнике BCD_1A_1 диагонали BD_1 и CA_1 в точке пересечения делятся пополам, в прямоугольнике CDA_1B_1 диагонали CA_1 и DB_1 в точке пересечения делятся пополам. Обозначив через O середину диагонали AC_1 параллелепипеда, найдем, что точка O является также серединой остальных диагоналей параллелепипеда BD_1, CA_1, DB_1. Таким образом, все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке O. Сумма расстояний от этой точки до всех восьми вершин параллелепипеда минимальна.

Устный командный тур

1. 1 : 4.

2. 2.

3. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ стороны клетки.

4. Поскольку углы KBL и LBC равны и вписаны в одну окружность, то $KL=LC$ (рис.8). Далее, поскольку точка L лежит на высоте BH равнобедренного треугольника, то $AL=LC$. Поэтому $KL=AL$, и треугольник AKL – равнобедренный.

Заметим, что решение задачи не использует то, что точка K – середина стороны AB.

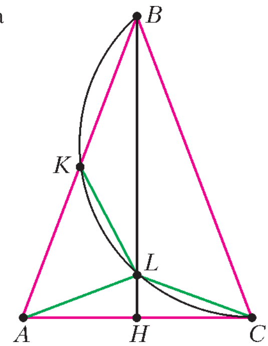


Рис. 8

5. 8 и 56.

КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, С.Л.Кузнецов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.А.Аткарская, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: (495) 930-56-48
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь
www.Pareto-print.ru

Как мыслиТ ШАХМАТИСТ-2

Во время шахматной партии зачастую возникают сложные позиции, требующие расчета нескольких длинных и запутанных вариантов, которые с трудом поддаются корректной оценке. Если вариант связан с жертвами, то ошибка в его расчете может привести к поражению из-за материального неравенства. В таком случае полезно иметь предохранительную сетку – альтернативный путь на «дереве вариантов» (подробно о нем речь шла в предыдущем выпуске шахматной странички). По нему можно будет пойти, если выяснится, что изначально выбранное продолжение не срабатывает. Самый часто встречающийся вариант страховки – вечный шах в запасе.

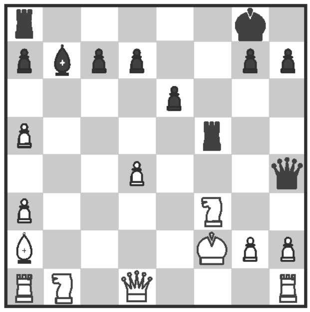
Рассматриваемая ниже партия была сыграна на шахматной олимпиаде 1998 года. Она примечательна тем, что в ней был разыгран редко встречающийся на высшем уровне дебют – А40, известный на русском языке под названием «Невозможное начало». Для этого дебюта характерна острая борьба с обилием жертв с обеих сторон.

А.Дреев – А.Шабалов

Элиста, 1998

1. d4 e6 2. c4 b6 3. e4 ♝b7 4. ♗d3 f5 5. ef ♝b4+ 6. ♔f1 ♞f6 7. c5 bc 8. a3 c4 9. ♗:c4 ♝a5 10. ♘f3 0-0 11. ♗d2 ♞c6 12. ♗:a5 ♞:a5 13. ♗a2 ♞e4!? 14. b4 ♜:f5!? – жертва первой фигуры! 15. ba ♞:f2 – жертва второй фигуры! 16. ♔:f2 ♛h4+.

Ключевая позиция. Результат партии зависит от того, смогут ли белые правильно защититься от шаха. Ходы g3?, ♔g1?, ♔e3?! ставят белых на грань поражения.



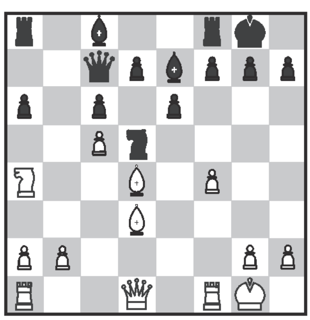
Единственный ход, дающий им шансы на победу, 17. ♔e2! ♛e4+ 18. ♔d2 ♜:f3 19. gf ♛:d4+ 20. ♔c2 ♛:a1 21. ♘c3 ♛:d1 22. ♖:d1 с лучшими шансами у белых ввиду слабости пешки а7. В партии же белые выбрали самый безопасный ход: 17. ♔f1 ♝a6+! 18. ♔g1 ♜:f3! 19. gf ♜f8 (у черных осталось слишком мало атакующих фигур, и логичным решением для них будет остановиться на вечном шахе) 20. ♘d2 ♛g5+ 21. ♔f2 ♛h4 22. ♔g1. Ничья.

До сих пор мы рассматривали методы мышления, основанные на «дереве вариантов», однако существуют способы шахматного расчета, базирующиеся, в первую очередь, на позиционном понимании. Один из них – «поиск цели».

Г.Кузьмин – Е.Свешников

Москва, 1973

Данная позиция выглядит как будто специально созданной для типичной двойной жертвы слонов на g7 и h7, разрушающей пешечное прикрытие короля.



Однако пока она не срабатывает: 16. ♗:h7 ♚:h7 17. ♕h5+ ♚g8 18. ♗:g7 ♚:g7 19. ♕g4+ ♚h7 20. ♖f3 ♞:f4 21. ♖:f4 f5, отбивая атаку.

Чтобы найти путь к победе, необходимо определить главный защитный ресурс черных («цель»). Это – ход ♞:f4. Соответственно, необходимо отвлечь коня с d5, и к выигрышу будет вести ход 16. ♘b6! ♞:b6 17. ♗:h7+ ♚:h7 18. ♕h5+ ♚g8 19. ♗:g7 ♚:g7 20. ♕g4+ ♚h7 21. ♖f3. Белые победили.

Методом «дерева вариантов» человеку найти ход 16. ♘b6! практически невозможно, так как если не рассматривать его как часть единого тактического замысла, то он не попадет в список ходов-кандидатов. Поэтому следует тренировать позиционное мышление и методы игры в типичных позициях с тем, чтобы затем искать пути их применения в конкретных партиях.

А.Русанов

Индекс 90964

Прогулки с физикой

Зима. Подмосковье.
Глаз фотоаппарата запечатлел
красивые снежные тени.
Кто и как их образовал?

(Продолжение – на с. 10 внутри журнала)